

Análise de Imagens em Escalas Utilizando a Transformada Wavelet

Francisco E. A. Leite¹, Marcos V. C. Henriques¹, Maytê T. N. Cunha¹

¹Universidade Federal Rural do Semi-Árido (UFERSA)

¹Centro Multidisciplinar de Angicos (CMA)

¹Grupo de Análise e Processamento de Sinais e Imagens (GAPSI)

CEP: 59515-000 – Angicos – RN – Brazil

edcarlos@ufersa.edu.br, viniciuscandido@ufersa.edu.br,
mayte_tabata@hotmail.com

Abstract. *Signal and image processing is very important and represents a challenge. Although signals and images have coherent (or not) structures, spurious signals (noise) always appear that hamper adequate interpretations of the images in the original format. In this context, an analysis methodology for signals and images is presented. In the method, the wavelet transform is used to perform the Multiscale Decomposition of the images. This decomposition generates several patterns of images. The results show that the image and patterns are better analyzed on their individual wavelet scales.*

Resumo. *Processamento de sinais e imagens é importante e que sempre representa um desafio. Embora os sinais e imagens apresentem estruturas coerentes (ou não), sempre surgem sinais espúrios (ruídos) que dificultam interpretações nas imagens em seu formato original. Dentro deste contexto, uma metodologia de análise para sinais e imagens é apresentada. No método, a transformada wavelet discreta é utilizada na Decomposição Multiescala da imagem original. Esta decomposição gera padrões de imagens para cada escala da wavelet. Os resultados mostram que a imagem e os padrões de imagens são melhores analisados nessas escalas individuais.*

Palavras Chaves: *transformada wavelet; multiescala; escalograma*

1. Introdução

Em Processamento de Sinais e Imagens, faz-se uso de ferramentas da Física-Matemática e computacional, para se extrair informações adicionais que não estão presentes no formato da imagem original. Por exemplo, a transformada de Fourier é uma ferramenta bastante conhecida. Quando se aplica a transformada de Fourier a um sinal $f(t) \in L^2(\mathbb{R})$ é obtida uma representação “nova” do sinal em domínio da frequência $f(\omega)$. Esta nova está caracterizada na frequência e nenhuma informação temporal. Esta limitação na transformada de Fourier encontra-se no fato de a mesma não permitir uma análise, em separado, de trechos diferentes dos sinais [Grossmann and Morlet 1984].

Devido a essa limitação na transformada de Fourier fez surgir a transformada wavelet [Daubechies 1988], [Daubechies 1990], [Meyer 1993]. Com a transformada wavelet é possível decompor uma imagem em uma base formada por funções wavelets.

Em particular, com a transformada wavelet é possível uma representação adequada de sinais e imagens em níveis de resoluções diferentes. Este fato foi convenientemente explorado por Mallat [Mallat 1989] e Meyer [Meyer 1993], que lhes permitiram sistematizar e formular o conceito de *Análise Multiresolução*. Este método constitui um enquadramento adequado que facilita aplicação da modelagem computacional e a construção de algoritmos baseados nas wavelets [Daubechies 1988]. Analisando pelo lado de processamento de sinais e imagens, os modelos arquitetados com as wavelets são algoritmos que permitem decompor uma imagem (imagem original) em padrões de imagens semelhantes a imagem original, porém, com níveis de resoluções inferiores. Simultaneamente, nesses níveis de resoluções são obtidos os detalhes, os quais permitirão recompor a imagem inicial, partindo das informações contidas nos padrões da imagem decomposta.

Neste trabalho, uma imagem será decomposta em escalas (níveis de resoluções) utilizando a transformada wavelet discreta de Daubechies. Dessa forma, será possível analisar o *range* de frequência das imagens, sendo possível caracterizar o que é ruído ou características de padrões. Os níveis de resoluções de mais baixas frequências são considerados os níveis de “aproximação” e os níveis de resoluções de mais altas frequências são considerados os níveis de “detalhes” ou níveis das wavelets.

2. Transformada Wavelet

A transformada wavelet de um sinal $f(t) \in L^2(\mathbb{R})$ é uma decomposição em uma base formada por funções wavelets ψ a qual fornece uma representação dual no domínio espacial (escalas) e frequência [Moretin 2010].

2.1. Transformada Wavelet Contínua

A transformada wavelet contínua $d(s,u)$ de uma função $f(t) \in L^2(\mathbb{R})$ na escala s e tempo u é definida como sendo [Daubechies 1992],

$$d(s,u) = \langle f, \psi_{s,u} \rangle = \int_{-\infty}^{+\infty} f(t) \psi_{s,u}(t) dt \quad (1)$$

onde

$$\psi_{s,u}(t) = \frac{1}{\sqrt{|s|}} \psi\left(\frac{t-u}{s}\right) \quad (2)$$

são as funções que forma a base de wavelets. Os parâmetros s e u são números reais ($s \neq 0$) e que representam as dilatações e translações, respectivamente, da função wavelet ψ .

2.1. Transformada Wavelet Discreta

A transformada wavelet discreta é implementada com a discretização dos parâmetros de escala s e localização temporal u . Dessa forma, uma base wavelet discreta é formada escolhendo $s = 2^j$ e $u = n 2^j$ com j e n inteiros [Daubechies 1992]. Para cada valor de j o sinal (ou imagem) estará em uma escala j e nível de resolução 2^j .

A correspondente wavelet discreta é definida como sendo:

$$\psi_{j,n}(t) = \frac{1}{\sqrt{2^j}} \psi\left(\frac{t - n2^j}{2^j}\right) \quad (3)$$

onde j e n são os parâmetros inteiros associados com as dilatação e translações das wavelets. Nesse sentido, existe uma base de wavelets discretas tal que, uma função $f(t) \in L^2(\mathbb{R})$ pode ser expandida como uma combinação linear das funções de base wavelet:

$$f(t) = \sum_j \sum_n d_{j,n} \psi_{j,n}(t) \quad (4)$$

onde $d_{j,n}$ são os coeficientes wavelets e são calculados através do produto interno da função wavelet com a função $f(t)$ e fornecem informações sobre o comportamento da função $f(t)$ em seus níveis de resoluções 2^j e escala j com uma localização temporal.

2. Metodologia

A Metodologia aqui apresentada compreende em quatro etapas principais:

- (i) *Decomposição Multiescalas*: realizar a Decomposição em Multiescala da imagem original utilizando a transformada wavelet discreta de Daubechies, e que será aplicada em cada coluna da imagem. Dessa forma, obtêm-se vários padrões de imagens semelhantes, porém, em níveis de resoluções menores. Cada padrão de imagem está em uma determinada escala j e um nível de resolução 2^j . Isto significa que cada padrão será caracterizado por um *range* de frequência bem definido.
- (ii) *Atenuar Ruídos*: realizar o processo de atenuação (filtragem) do ruído considerando os níveis de escalas de resoluções adequadas. A atenuação do ruído é realizada em cada padrão de imagem, o que corresponde a realizar da atenuação por escala j da wavelet.
- (iii) *Espectro na Frequência*: análise na frequência de todas as colunas das imagens (da Figura 2) e observar o conteúdo na frequência das escalas j das wavelets para possível comportamento na frequência e comparar se a energia da imagem original foi afetada.
- (iv) *Escalograma em Cores*: construir o escalograma dos coeficientes $d_{j,n}$ da transformada wavelet discreta e analisar através de mapas de cores das singularidades onde os coeficientes das wavelets são predominantes.

O algoritmo de decomposição em multiescala utilizando a transformada wavelet discreta foi construído no software *MatLab* e implementado com os filtros h e g (passa-baixa e passa-alta) seguido por um operador de sub-amostragem ($\downarrow 2$) que reduz a quantidade de amostra à metade em cada iteração. Para a imagem aqui analisada, o índice de escala j varia de 1 a 11, pois a imagem possui 2048 amostras (pontos) em cada coluna e equivalente a 2^{11} para a transformada wavelet discreta. O padrão de imagem na pela escala $j = 1$ significa resolução “mais fina” (frequências maiores) e na escala $j = 11$, significa uma resolução “mais grossa” com conteúdo nas frequências menores. A transformada wavelet atua em cada coluna da matriz. Como tem-se 89 colunas na

imagem aqui analisada, então a transformada wavelet discreta é aplicada 89 vezes em cada imagem.

A Figura 1(a) ilustra o processo de decomposição utilizando a transformada wavelet com os filtros h e g e com sub-amostragem. O processo inicia em $a_{j=0}$ (imagem original) com $n = 2048$. No primeiro nível de decomposição gera-se os coeficientes $a_{j=1}$ e $d_{j=1}$ com metade das amostras. Os coeficientes $d_{j=1}$ são mantidos e o processo continua aos coeficientes $a_{j=2}$. Esta nova decomposição gera os coeficientes $a_{j=2}$ e $d_{j=2}$ possuindo um quarto das amostras. Os coeficientes $d_{j=2}$ são mantidos e o processo continua até $a_{j=11}$.

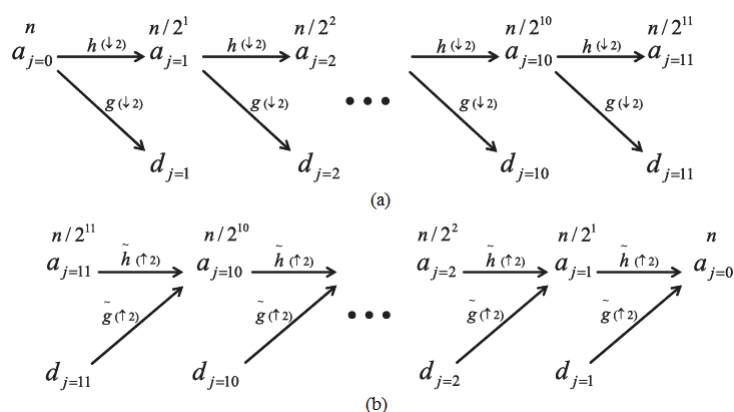


Figura 1. Representação em (a) do algoritmo de decomposição iterado com os filtros h e g , com sub-amostragem de fator 2. Em (b) o algoritmo de reconstrução iterado com a inserção de fator 2.

A Figura 1(b) ilustra o processo de reconstrução utilizando a transformada wavelet inversa. O processo inicia com os coeficientes a_{11} e d_{11} e ocorre a iteração com os filtros h e g seguidos de uma inserção ($\uparrow 2$) de fator 2.

3. Resultados e Discussões

A imagem original processada e analisada para se alcançar os objetivos deste trabalho está mostrada na Figura 2(a) e foi adquirida do bando de dados de livre acesso do *Center for Wave Phenomena* da *Colorado School of Mines* [Stockwell 2000]. A imagem representa um registro sísmico (sismograma) de uma determinada região do subsolo. É uma imagem do tipo SEG-Y que é o formato desenvolvido pela *Society of Exploration Geophysicists* [SEG 2018]. A imagem é uma matriz $M^{m \times n}$ de valores reais, isto é, composta por m amostras (linhas) e por n colunas. Então, como podemos perceber na Figura 2(a), esta imagem é uma matriz formada por $m = 2048$ linhas e $n = 89$ colunas.

Na imagem original todas as frequências estão presentes. A imagem da Figura 2(b) é a imagem “limpa” e contém um *range* de frequência e na Figura 2(c) tem-se a “porção” que foi atenuada da imagem original. Esta imagem contém *range* de frequência para sinais ruidosos. A soma das energias contidas nas imagens (b) e (c) resulta na energia contida imagem original (a).

Na Figura 2(d) até 2(i) têm-se os padrões de imagens obtidas por meio da Decomposição Multiescala utilizando a transformada wavelet discreta. Cada imagem é

uma “porção” da imagem original representada por escala da decomposição. Na Figura 2(d) tem-se o padrão de imagem na primeira escala $j = 1$. Na ordem, têm-se os padrões para as escalas $j = 2$ (e), $j = 3$ (f), $j = 4$ (g), $j = 5$ (h) e $j = 6 - 11$ (i), respectivamente. A Figura 2(i) tem-se um conjunto de escalas de $j = 6, 7, 8, 9, 10$ e 11 sendo representado por um único padrão. Essa junção de escalas foi escolhida uma vez que esses padrões contêm somente sinais ruidosos.

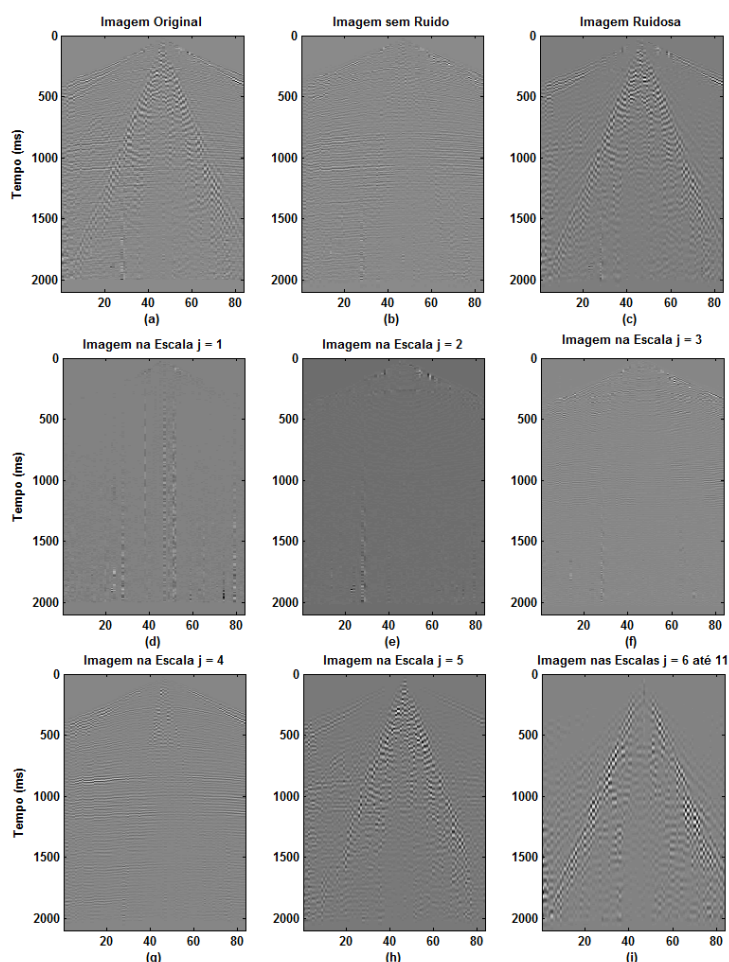


Figura 2. Imagem original (a), imagem limpa (b), imagem ruidosa (c), imagem na escala $j = 1$ (d), $j = 2$ (e), $j = 3$ (f), $j = 4$ (g), $j = 5$ (h) e $j = 6$ até 11 (i).

Na Figura 2(h) e (i), aparecem fortemente o ruído bem característico em um formato de cone. Portanto, da escala $j = 5$ até a escala $j = 11$, tem-se uma caracterização bem definida na frequência para ruído. Neste sentido, e como se pode observar na Figura 2(d)-(g), as escalas $j = 1$ até $j = 4$ tem-se as imagens para as frequências maiores com pequenas amplitudes. Estas não contêm ruídos.

Para a reconstrução da imagem da Figura 2(b) foi considerado somente os padrões de imagens nas escalas $j = 1, 2, 3$ e 4 . Isto significa atribuir valores zeros para os padrões de imagens nas escalas $j = 5, 6 - 11$. A reconstrução é realizada pelo processo da transformada wavelet inversa de Daubechies.

Para ilustrar em mais detalhes o efeito da decomposição e caracterização de singularidades da transformada wavelet nas imagens é apresentado uma análise na frequência, utilizando a Transformada de Fourier, e uma análise da coerência wavelet. Esta última análise é realizada através do escalograma e que relaciona o grau de correlação entre a imagem em suas determinadas escalas para a Decomposição Multiescala. Querendo não causar repetições nas análises, mostra-se somente para uma coluna de cada imagem da Figura 2(a)-(i). A coluna (traço) escolhida para tais análises de cada imagem foi a coluna 32. Neste sentido, realiza-se o Espectro de Frequência e o Escalograma para a coluna 32 das imagens mostradas na Figura 2.

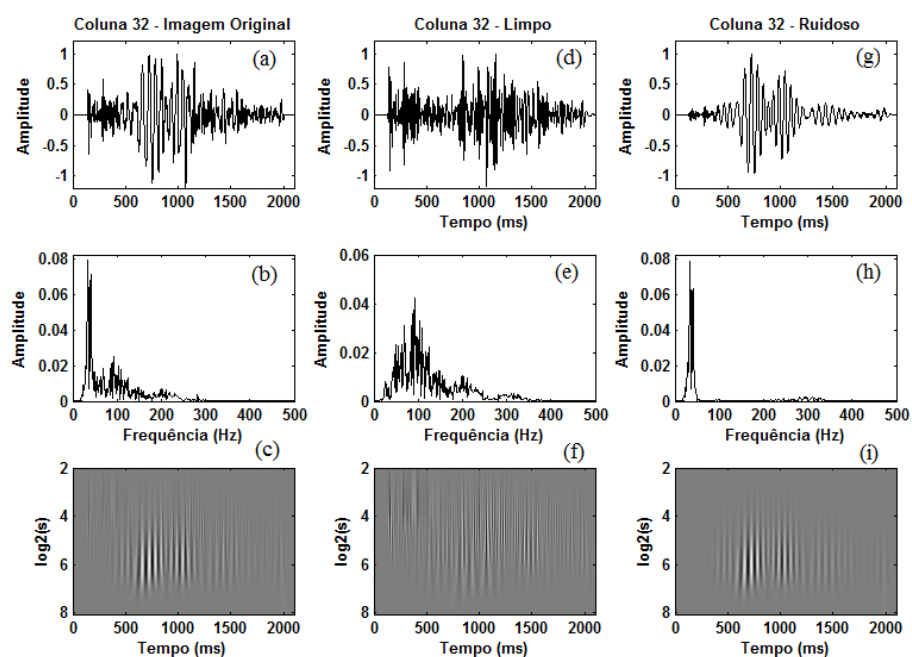


Figura 3. Coluna 32 da imagem original (a), limpa (d) e ruidosa (g).

Nas Figuras 3 e 4, tem-se o sinal (coluna 32) em seu formato original (Amplitudes \times Tempo), seguida de seu Espectro de Fourier e do seu Escalograma (mapa cinza) dos coeficientes wavelets em suas determinadas escalas. O Espectro de Fourier fornece informações sobre as frequências do sinal (coluna). Dessa forma, é possível saber o conteúdo na frequência para cada imagem e assim descobrir a frequência em cada escala para a decomposição em wavelets. O Escalograma relaciona os coeficientes wavelets (em cinza) em suas escalas. Para cores mais próximas do vermelho, significa que o sinal possui frequências menores, o que caracteriza o sinal ruidoso.

A Figura 3 mostra, respectivamente, a coluna 32 em seu formato convencional, o Espectro de Fourier e o Escalograma para as imagens apresentadas na Figura 2(a)-(c). Em (a), tem-se o sinal da imagem original onde percebe-se que existem amplitudes dominantes (espaçadas) no intervalo de tempo entre 550 *ms* e 1200 *ms*. Em seu escalograma da Figura 3(c), os coeficientes wavelets revelam que esta região domina todo o espectro de energia do sinal. Para esta afirmação basta observar no escalograma da Figura 3(f) onde os coeficientes wavelets estão mais “distribuídos” em uma região temporal muito maior. Isto porque este escalograma é da coluna 32 da imagem mostrada

na Figura 2(b), o qual é o sinal da imagem após atenuação do sinal espúrio. Na Figura 3(i), tem-se somente o escalograma da coluna 32 da imagem ruidosa e mostrada na Figura 2(c). Desta, percebe-se que o escalograma é semelhante ao escalograma do sinal da imagem original, confirmando que o sinal espúrio domina completamente a energia na imagem original. Analisando os espectros de Fourier da Figura 3(b), (e) e (h), tira-se

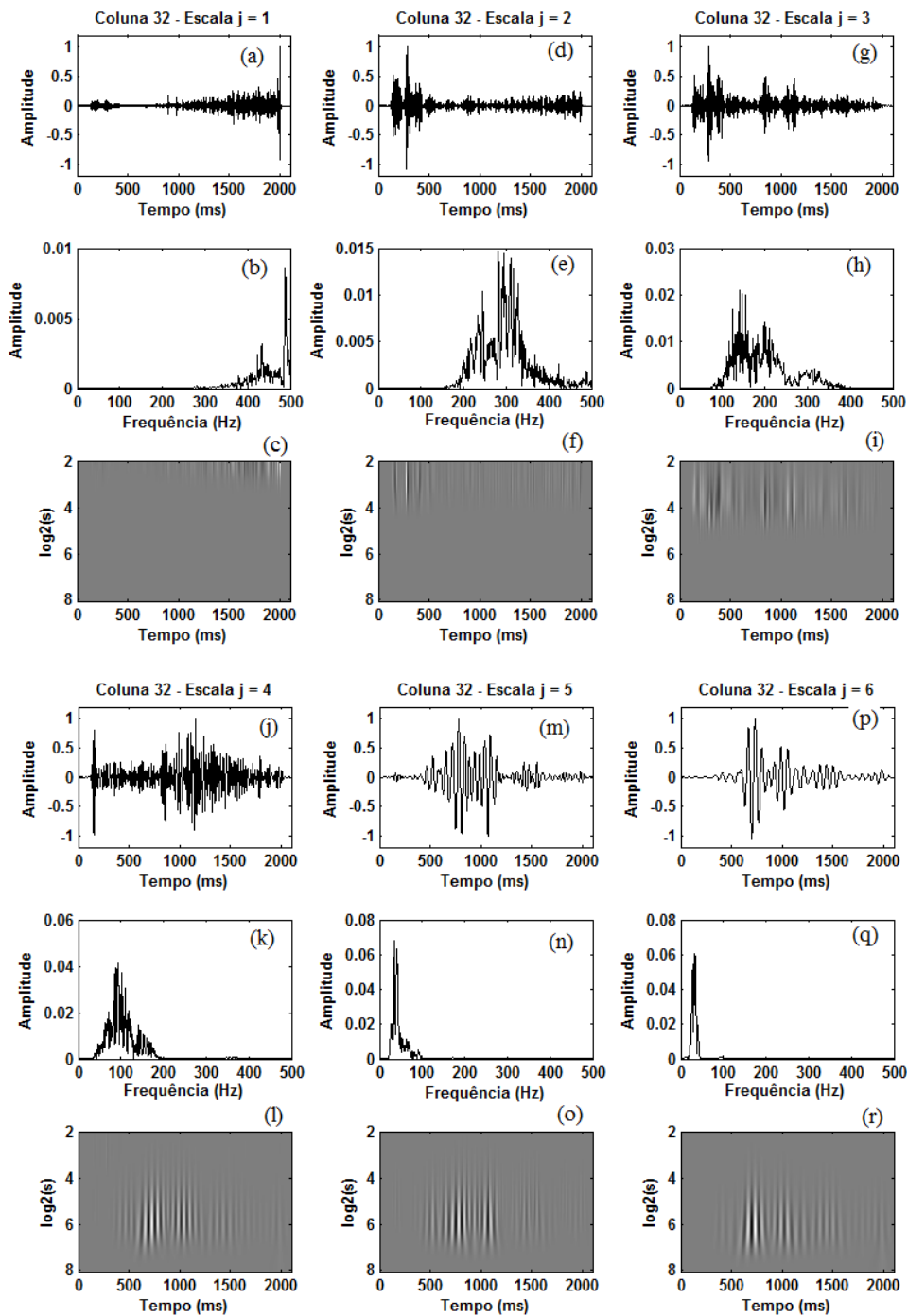


Figura 4. Coluna 32 dos padrões de imagens.

a conclusão que o sinal espúrio apresenta conteúdo para frequências menores e o sinal sem ruído apresenta conteúdo para frequências maiores.

Para a Figura 4(a)–(r), tem-se a coluna 32 dos padrões de imagens mostradas na Figura 2(d)–(i). Torna-se mais evidente a caracterização do ruído nas escalas maiores observando a concentração dos coeficientes wavelets (em cores) no escalograma.

4. Conclusões

Os resultados obtidos com a metodologia deste trabalho mostraram que a transformada wavelet pode ser utilizada na decomposição de imagens e assim caracterizar de forma eficiente as características dos seus padrões de imagens em cada escala das wavelets. Com as análises deste trabalho, fica evidente que as escalas $j = 1, 2, 3$ e 4 são as adequadas para a reconstrução da imagem sem ruído. O escalograma é uma alternativa eficaz para visualizar a coerência dos coeficientes e assim predizer em quais escalas a energia do sinal predomina.

Referências Bibliográficas

- Daubechies, I. (1988). “Orthonormal bases of compactly supported wavelets”. *Communication on Pure and Applied Mathematics*, 41, p. 909 – 996.
- Daubechies, I. (1990). “The wavelet transform, time-frequency localization and signal analysis”. *IEEE Transactions on Information Theory*, 36, p. 961 – 1005.
- Daubechies, I. (1992). “Ten lectures on wavlets”. Society for Industrial and Applied Mathematics. Philadelphia.
- Grossmann, A. and Morlet, J. (1984). “Decomposition of hardy function into square integrable wavelets of constant shape”. *SIAM Journal on Mathematical Analysis*, 15(4), p. 723 – 736.
- Mallat, S. (1989). “A Theory for Multiresolution Signal Decomposition: the Wavelet Representation”. *IEEE Transaction on Pattern Analysis and Machine Intelligence*, 11(7), p. 674 – 693.
- Meyer, Y. (1993). “Wavelets: algorithms and aplicaciones”. Society for Industrial and Applied Mathematics. Philadelphia. SIAM.
- Moretin, P. A. (2010). “Ondas e Ondaletas: da Análise de Fourier à Análise de Ondaletas”. Edusp, São Paulo.
- SEG. (2018). Society of Exploration Geophysicists. <http://seg.org>, Março.
- Stockwell, J. (2000). Center for Wave Phenomena. Colorado School of Mines. <http://www.cwp.mines.edu/cwpcodes/index.html>.