

# Uma Ferramenta de Prototipagem para Análise de Técnicas de Estimacão de Direção de Chegada

Mário G. F. Figueredo<sup>1</sup>, Danilo de S. Pena<sup>1</sup>, Carlos A. de Lima Filho<sup>2</sup>,  
Matheus F. de S. Dória<sup>2</sup>, Allan de M. Martins<sup>1</sup>, Vicente A. de Sousa Jr.<sup>1\*</sup>

<sup>1</sup>Programa de Pós-Graduação em Engenharia Elétrica e de Computação (PPGEEC)  
Universidade Federal do Rio Grande do Norte (UFRN) – Natal – RN – Brazil

{mario.gppcom,danilodsp,vicente.sousa}@ufrn.edu.br,allan@dca.ufrn.br

<sup>2</sup>Departamento de Engenharia de Comunicações (DCO)  
Universidade Federal do Rio Grande do Norte (UFRN) – Natal – RN – Brazil

{carloslm,matheusfagundes}@ufrn.edu.br

**Abstract.** *The state-of-the-art analysis on the estimation of the direction of arrival (DoA) indicates the existence of a wide range of algorithms, in some cases with several variants. Thus, there is a plurality of mathematical equations and models, evaluated in several prototyping scenarios, which imposes on the researcher difficulties to compare the performance among techniques. This paper proposes the Simulation PLatform for PosiTion LoCatiOn evaluation (SimPatico), as an easy-to-customize prototyping tool to investigate solutions of the DoA estimation. The proposed simulator platform is used to validate the DOA estimation algorithms, and perform a unified analysis of parametric and non-parametric algorithms.*

**Resumo.** *A análise do estado da arte sobre estimacão da direção de chegada (DoA) indicou a existência de uma ampla gama de algoritmos, e em alguns casos com diversas variantes. Assim, existe uma pluralidade de equacionamentos e representações matemáticas, avaliados em diversos cenários de prototipagem, que impõe ao pesquisador certa dificuldade para realizar avaliações de desempenho comparativas entre as técnicas. Este artigo apresenta o SimPatico (Simulation PLatform for PosiTion LoCatiOn evaluation), uma ferramenta de prototipagem de fácil customização, que pode ser utilizada para testar soluções de estimacão de DoA. O SimPatico é usado para validar o desempenho de algoritmos clássicos de estimacão de DoA e apresentar uma análise de desempenho unificada de algoritmos paramétricos e não-paramétricos.*

## 1. Introdução

Por meio de arranjos de sensores, métodos de direção de chegada são capazes de fornecer diversas informações, dentre as quais se destaca a possibilidade de localizar múltiplas fontes. São exemplos de produtos ou sistemas comerciais que fazem uso desta informação: Os Alto-falantes inteligentes [Google 2018]; Robôs atendentes [Valin et al. 2003]; e Detecção de atiradores, de explosões e de acidentes com alto impacto [Williams 2017].

Dos diversos métodos de estimacão de localizacão, o AoA (do Inglês, Angle of Arrival) se destaca por não necessitar de qualquer tipo de sincronismo entre a fonte e o

---

\*O presente trabalho foi realizado com apoio da Coordenação de Aperfeiçoamento de Pessoal de Nível Superior - Brasil (CAPES) - Código de Financiamento 001.

receptor, tornando sua implementação prática mais viável. As técnicas baseadas neste método podem ser classificadas em paramétricas e não-paramétricas. As técnicas paramétricas, como MUSIC [Schmidt 1982], ESPRIT [R. Roy 1986] e Root-MUSIC [Barabell 1983], fazem uso de informações *a priori* para explorar estruturas previsíveis e padrões esperados no processamento do sinal. Então, por meio da autodecomposição da matriz de covariância em subespaços, diversas técnicas foram desenvolvidas buscando explorar estes padrões esperados. Uma das informações que em geral é muito explorada, é o conhecimento do ruído, assumindo como sendo temporal e espacialmente branco com uma distribuição Gaussiana, de média zero e variância  $\sigma^2$ . Por outro lado, as técnicas não-paramétricas, como o BeamScan [Munoz et al. 2009], MVDR (Capon) [Munoz et al. 2009] e Root-MVDR [Van Trees 2004] [Spagnolini 2018], formam um conjunto de ferramentas de uso mais apropriado quando não se conhece a distribuição do sinal e seus parâmetros. Em [Munoz et al. 2009], o autor classifica os métodos não-paramétricos como aqueles que não fazem suposições sobre a estrutura de covariância dos dados e assumem que o arranjo de sensores está calibrado.

Essa ampla gama de algoritmos de estimação de DoA, e suas diversas variantes, evidencia que existe uma pluralidade de modelos que impõe ao pesquisador certa dificuldade para realizar avaliações de desempenho comparativas entre as técnicas. Outro fato é que as diversas técnicas não foram comparadas em um mesmo cenário de prototipagem, ficando difícil traçar uma comparação justa entre os algoritmos.

Este trabalho propõe um estudo complementar a literatura corrente ao traçar um quadro comparativo do desempenho de técnicas paramétricas e não-paramétricas de estimação de DoA que envolva o mesmo cenário de prototipagem. Para tal, será apresentado o *SimPatico* (*Simulation Platform for Position Location evaluation*), uma ferramenta de prototipagem de fácil customização, que pode ser utilizada para testar soluções de estimação de DoA. O simulador é usado para validar algoritmos clássicos de estimação de DoA e apresentar uma análise de desempenho unificada de algoritmos paramétricos (MUSIC, ESPRIT e Root-MUSIC) e não-paramétricos (BeamScan, MVDR e Root-MVDR). Os autores deste artigo alegam que não existe trabalho na literatura com esse escopo.

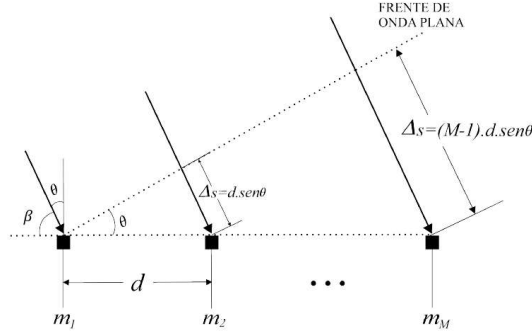
## 2. SimPatico: *Simulation Platform for Position Location evaluation*

O SimPatico é um simulador construído para dar suporte a prototipagem de soluções em DoA. Ele é desenvolvido por alunos de graduação e pós-graduação da UFRN<sup>1</sup> e mantido no GitHub (<https://github.com/danilodsp/direction-of-arrival>). Além dos aspectos apresentados neste trabalho, ele modela técnicas de DoA e TDoA (*do Inglês, Time-Difference-of-Arrival*), sinais sujeitos a ruído branco e a ruído impulsivo, fontes de sinais senoidais e de voz, configuradas como uma única ou múltiplas fontes. Ele também dá suporte a estimação de DoA com sinais medidos.

O sistema foi modelado considerando que a recepção dos sinais é feita por um Arranjo Linear Uniforme, conhecido como ULA (do Inglês, *Uniforme Linear Array*), como ilustrado na Figura 1. Ele possui  $M$  sensores em disposição linear, com espaçamento uniforme  $d$ , no qual incidem  $D$  sinais, com ângulo de chegada  $\beta$  e velocidade de propagação constante  $u$ .

O espaçamento entre os sensores é dado em função do comprimento de onda  $\lambda$  do sinal incidente e, geralmente, é configurado para  $d \leq \lambda/2$ . Em [Mahafza 2013], é formulado

<sup>1</sup>O desenvolvimento do SimPatico envolve docentes e discentes do Programa de Pós-Graduação em Engenharia Elétrica e de Computação (PPgEEC, <http://www.posgraduacao.ufrn.br/ppgeec>), dos Departamentos de Engenharia de Comunicações (DCO), Engenharia Elétrica (DEE) e Engenharia de Controle e Automação (DCA) da Universidade Federal do Rio Grande do Norte (UFRN).



**Figura 1: Arranjo Linear Uniforme (adaptado de [Munoz et al. 2009]).**

a ocorrência de ambiguidade, a qual pode gerar falsos valores de DoA para  $d > \lambda/2$ .

Ao considerar um arranjo ULA e que a frente de onda proveniente de um sinal com frequência  $f$  em Hz e velocidade de propagação  $u$  seja plana, o atraso  $\tau$ , em fase, entre sensores consecutivos será constante. Então, o atraso entre o  $m$ -ésimo e o primeiro sensor pode ser escrito como:

$$\tau_{M,1} = \omega \cdot \Delta t_{M,1} = \omega \cdot \frac{(M-1) \cdot d \cdot \text{sen}(\theta)}{u} = (M-1) \cdot \tau, \quad (1)$$

sendo  $\omega = 2\pi f$ . Por fim, o ângulo de chegada em graus é dado por:  $\beta = 90 - \arcsen\left(\frac{\tau \cdot u}{d}\right)$ .

Considerando que o ULA possui  $M$  sensores e que podem incidir  $D$  sinais, o sinal recebido resultante da combinação destes sinais no  $m$ -ésimo sensor pode ser escrito como:

$$r_m(t) = \sum_{i=1}^D H_m(\omega_c, \theta_i) \cdot e^{-j \cdot (m-1) \cdot \tau_i} \cdot s_i(t) + \eta_m(t), \quad m = 1, \dots, M. \quad (2)$$

Em que  $s_i(t)$  é o  $i$ -ésimo sinal que chega ao arranjo,  $e^{-j \cdot (m-1) \cdot \tau_i}$  é o atraso de fase sofrido pelo  $i$ -ésimo sinal em função da distância entre o primeiro e o  $m$ -ésimo sensor, e  $\eta_m(t)$  é o ruído complexo. Nessa primeira versão do *SimPatíco*, os sensores e a propagação são considerados ideais, portanto,  $H_m(\omega_c, \theta_i)$  é igual a 1. A única distorção modelada é o ruído, que pode ser AWGN (*Additive White Gaussian Noise*) ou impulsivo.

Escrevendo  $a_{i,m}$  como o atraso de fase sofrido pelo  $i$ -ésimo sinal em função da distância entre o primeiro e o  $m$ -ésimo sensor, uma representação matricial pode ser escrita ao definir a matriz  $\mathbf{A}_{M \times D}$  (matriz de direção). Ela é formada por os elementos  $a_{i,m}$ . No caso particular de  $D = 1$ ,  $\mathbf{A}$  terá dimensão  $M \times 1$  e é chamada de vetor de direção  $\mathbf{a}$  (do Inglês, *steering vector*). Sua formulação é dada pela Equação 3:

$$\mathbf{a}_{M \times 1} = \left\{ 1, e^{-j \cdot \tau}, e^{-j \cdot 2 \cdot \tau}, \dots, e^{-j \cdot (m-1) \cdot \tau} \right\}. \quad (3)$$

Já o termo  $s_i(t)$  da Equação 2 pode ser escrito como um vetor, com dimensão  $D \times 1$ , representando o  $i$ -ésimo sinal que atinge o arranjo de sensores em um dado instante de tempo. Escrevendo  $\boldsymbol{\eta}$  como o vetor de ruído de dimensão  $M \times 1$ , a Equação 2) pode ser reescrita como:

$$\mathbf{r}_{M \times 1} = \mathbf{A}_{M \times D} \cdot \mathbf{s}_{D \times 1} + \boldsymbol{\eta}_{M \times 1}. \quad (4)$$

Dessa forma, o sinal  $s$  é gerado no computador, sua versão recebida nos sensores (Equação 4) é calculada para validar a implementação dos algoritmos de estimação de DoA. Por fim, as seguintes considerações são feitas para garantir que todos os algoritmos apresentados a seguir possam ser comparados em um mesmo cenário:

- A fonte do sinal está suficientemente distante do arranjo de forma que a frente de onda que atinge o arranjo seja considerada planar;
- As diferenças de fases entre os pares de sensores consecutivos são iguais;
- Os sinais são de banda estreita, e descorrelacionados entre si;
- A quantidade de sensores  $M$  é igual ou maior do que  $(D + 1)$  fontes.

### 3. Técnicas de DoA

#### 3.1. BeamScan

Segundo Van Trees em [Van Trees 2004], o algoritmo BeamScan, também conhecido como Bartlett Beamformer ou Conventional Beamformer, faz a varredura de um determinado espaço em função do *steering vector*  $\mathbf{a}(\theta)$ , retornando a magnitude ao quadrado da saída desta varredura. Os ângulos de chegada  $\beta_{1..D}$  são determinados a partir dos  $D$  máximos no pseudo-espectro criado pela Equação 5.

$$P_{BS}(\theta) = \frac{1}{N} \sum_{n=1}^N |\mathbf{a}(\theta)^H \cdot \mathbf{r}(\mathbf{n})|^2 = \mathbf{a}(\theta)^H \cdot \hat{\mathbf{R}} \cdot \mathbf{a}(\theta). \quad (5)$$

em que  $N$  é o número de amostras coletadas por sensor, também chamado de *snapshots*;  $\theta$  é o ângulo candidato e assume valores de  $-90^\circ$  a  $90^\circ$ ; e  $\hat{\mathbf{R}}$  é a matriz de covariância estimada. Ele pode ser obtida como  $\hat{\mathbf{R}} = \frac{1}{N} \sum_{n=1}^N \mathbf{r}(\mathbf{n}) \cdot \mathbf{r}^H(\mathbf{n})$ .

#### 3.2. Minimum Variance Distortionless Response (MVDR)

Segundo o Chao Pan em [Pan et al. 2014], o MVDR, também conhecido como Capon, é uma técnica que busca minimizar a variância do ruído na saída do arranjo, com a restrição que a fonte do sinal está em visada direta com o arranjo de sensores. Então, após um processo de otimização descrito em [Van Trees 2004, Pan et al. 2014], a Equação 5 é substituída por:

$$P_{MVDR}(\theta) = \frac{1}{\mathbf{a}(\theta)^H \cdot \hat{\mathbf{R}}^{-1} \cdot \mathbf{a}(\theta)}, \quad (6)$$

#### 3.3. Multiple Singal Classification (MUSIC)

O algoritmo MUSIC [Schmidt 1986] é capaz de estimar a potência e a correlação cruzada de formas de ondas incidentes, bem como a direção de chegada, a potência do ruído ou de interferências, explorando o subespaços de sinais  $\hat{\mathbf{E}}_s$  e ruído  $\hat{\mathbf{E}}_\eta$  existente na matriz de covariância do sinal recebido. Os ângulos de chegada  $\beta_{1..D}$  são determinados a partir dos  $D$  máximos no pseudo-espectro criado pela Equação 7.

$$P_{MUSIC}(\theta) = \frac{1}{|\mathbf{A}(\theta)\mathbf{E}_n \cdot \mathbf{E}_n^H \cdot \mathbf{A}(\theta)^H|}. \quad (7)$$

#### 3.4. Estimation of Signal Parameters via Rotational Invariance Techniques (ESPRIT)

O ESPRIT explora a propriedade de invariância rotacional de dois subarranjos idênticos e resolve os autovalores de uma matriz relacionando dois subespaços de sinal. Considerando que a matriz de direção representa sensores com deslocamento de fase progressivo, será

observado a existência de uma matriz  $\Phi$  que relaciona estes subarranjos. Definindo  $\Phi$  como  $\text{diag}\{z_1, z_2, \dots, z_D\}$  e  $z$  como  $e^{j \cdot \Theta_{1, \dots, D}}$ , é mostrado em [Chung et al. 2014] que a partir dos autovalores de  $\Phi$  é possível determinar o ângulo de chegada  $\beta$ , a partir de:

$$\beta_i = -\text{sen}^{-1} \left\{ \frac{\arg z_i}{k \cdot d} \right\}, \quad \text{com } k = \frac{u}{\omega}. \quad (8)$$

### 3.5. Root Versions

Objetivando evitar realizar a busca do DoA no pseudo-espectro, as *Root Versions* dos MVDR e do MUSIC foram concebidas considerando que as Equações 6 e 7 podem ser vistas como um polinômio  $Q(\theta)$  com  $2 \cdot (M - 1)$  raízes. Este polinômio pode ser definido como  $Q(\theta) = \mathbf{a}(\theta)^H \cdot \mathbf{C} \cdot \mathbf{a}(\theta)$ , em que  $\mathbf{C}$  é igual a  $\hat{R}^{-1}$  para o Root-MVDR ou  $E_n \cdot E_n^H$  para o Root-MUSIC. Todo o processo necessário para obtenção das raízes é descrito em [Van Trees 2004], e o DoA estimado é obtido como:

$$\beta_i = -\text{sen}^{-1} \left\{ \frac{\arg z_i}{k \cdot d} \right\}, \quad \text{com } z_i = |z_i| e^{j \cdot (M-1) \cdot k_i} \quad e \quad k = \frac{u}{\omega}. \quad (9)$$

## 4. Resultados de Validação

Como forma de validar resultados da literatura e realizar uma espécie de *benchmarking*, foi feita uma pesquisa de trabalhos de referência e configuração do SimPatico para realizar simulações específicas de reprodução de resultados já publicados. Essa etapa foi fundamental para identificar que a maioria dos trabalhos ocultam informações crucias que dificultam sua reprodução. Em especial para os trabalhos de DoA, se destaca o tipo de sinal emitido pela fonte, a resolução do *grid* para técnicas que necessitam gerar pseudo-espectro para estimação do DoA, e o cálculo da relação sinal ruído (SNR).

A Figura 2 mostra resultados para os algoritmos ESPRIT e Root-MUSIC baseados em [Rao and Hari 1989] e do MUSIC em [Johnson et al. 2008].

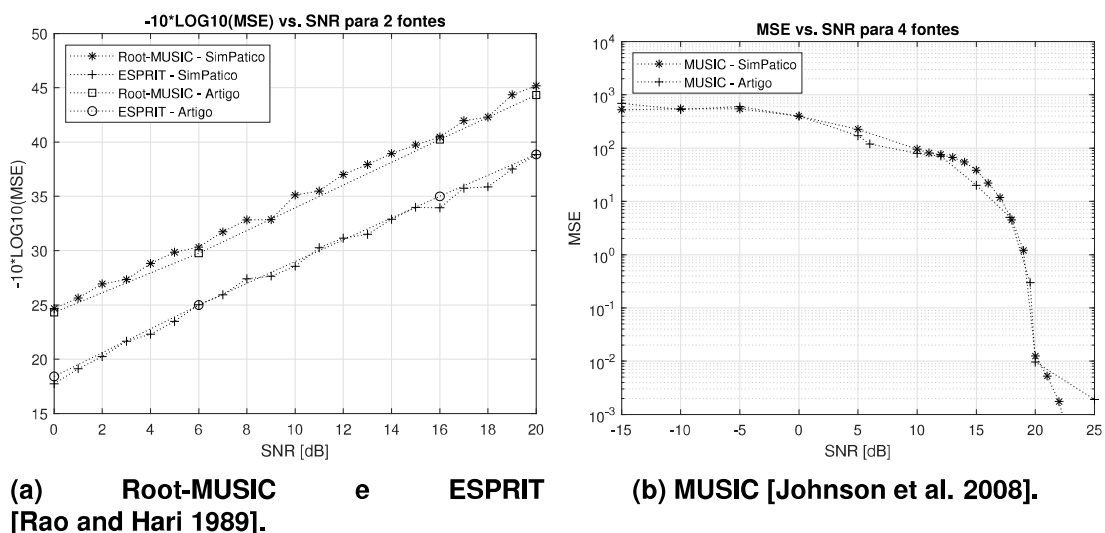


Figura 2: Validação de resultados da literatura com o SimPatico.

É possível notar um excelente convergência dos resultados das curvas dos artigos com as obtidas pelo SimPatico. Já tabela Tabela 1 mostra os resultados de validação do MVDR [Akbari et al. 2010]. Os resultados de estimação são praticamente idênticos na segunda casa decimal.

**Tabela 1: Resultados de validação do MVDR [Akbari et al. 2010].**

Média dos ângulos estimados (Graus)		Desvio em relação ao valor esperado (%)	
Artigo	SimPatico	Artigo	SimPatico
$\theta_1 = 70^\circ$	70,0679°	70,0660°	0,10%
$\theta_2 = 87^\circ$	86,6356°	86,6339°	-0,42%
$\theta_1 = 71^\circ$	71,0977°	71,0980°	0,14%
$\theta_2 = 87^\circ$	86,4832°	86,4908°	-0,59%
$\theta_1 = 72^\circ$	72,1410°	72,1413°	0,20%
$\theta_2 = 87^\circ$	86,2558°	86,2503°	-0,86%

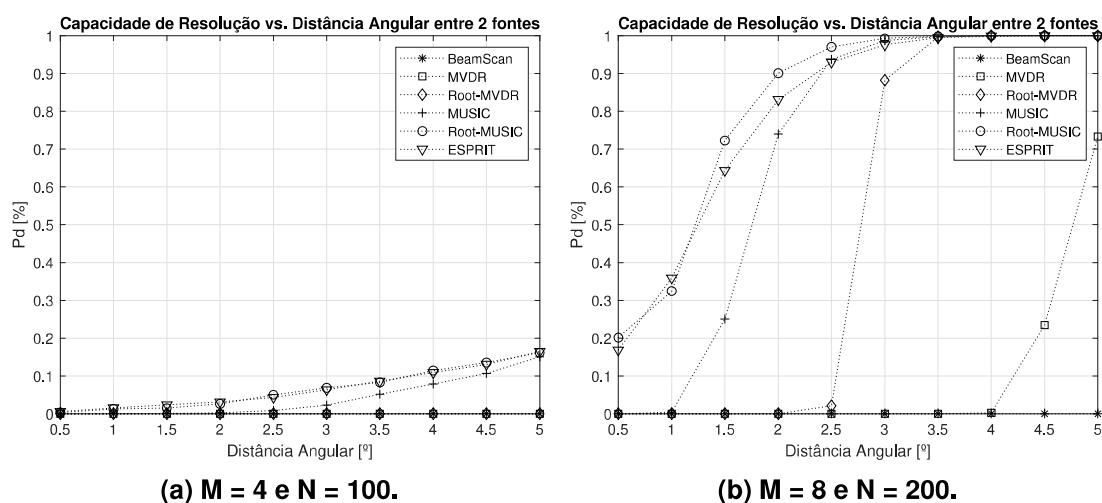
## 5. Análise Paramétrica

Após o processo de validação, dois cenários foram simulados. O primeiro com configuração mais simples, buscando menores custos de construção do arranjo e menor tempo de resposta do simulador, por meio dos seguintes parâmetros:  $D = 2$ ,  $M = 4$ ,  $N = 100$ . A simulação foi repetida 5000 vezes ( $MC$  - eventos de Monte Carlo) e as métricas de saída representam a média sobre todos os experimentos. Já no segundo cenário, o SimPatico foi configurado com  $M = 8$  e  $N = 200$ , buscando medir o impacto na capacidade de resolução e precisão na estimação.

Os  $D$  sinais são do tipo complexo e decorrelacionados entre si. A SNR é calculada em dB com a média da potência dos  $D$  sinais. Para os métodos que geram o pseudo-espectro, o *grid* foi construído de  $-90^\circ$  à  $90^\circ$  com valores espaçados em  $0,1^\circ$ .

Por meio do cálculo da Probabilidade de Detecção ( $P_d$ ), conforme a Equação 10, a Figura 3 ilustra o percentual das estimações de ângulo  $\hat{\beta}$  bem sucedidas, dado um desvio máximo de estimação aceitável de até  $\pm 0,25^\circ$ . Nesta etapa, os tempos médios de execução para o BeamScan, MVDR, Root-MVDR, MUSIC, Root-MUSIC e ESPRIT, nos dois cenários foram de, respectivamente, 80,32/91,82, 66,89/81,98, 4,25/4,56, 84,45/100,57, 4,43/5,78 e 4,49/4,79 segundos, ilustrando a menor complexidade das versões *roots* e do ESPRIT.

$$P_d = P(\beta_{real} - 0,25^\circ < \hat{\beta} < \beta_{real} + 0,25^\circ) \quad (10)$$



**Figura 3: Avaliação da Probabilidade de Detecção em função da distância angular entre os sinais para SNR = 20 dB.**

A análise da Figura 3 indica que, para sinais com distância angular de no máximo

5°, dobrar a quantidade de sensores e de *snapshots* trouxe ganhos substanciais para todas as técnicas, exceto para o BeamScan<sup>2</sup>. Em termos gerais, Root-MUSIC e o ESPRIT tiveram os melhores desempenho, não somente em termos de  $P_d$ , mas também em função do tempo médio de execução.

Por fim, por meio do cálculo do RMSE (do Inglês, Root Mean Square Error) médio, conforme a Equação 11, a Figura 4 foi elaborada para ilustrar o quanto o DoA estimado desvia do ângulo real esperado em função do decréscimo da SNR. Neste cenário os ângulos de chegada são fixos em 30° e 50° e os demais parâmetros são os mesmos (a -  $D = 2$ ,  $M = 4$ ,  $N = 100$  e b -  $D = 2$ ,  $M = 8$ ,  $N = 200$ ).

$$RMSE = \frac{\sqrt{\frac{1}{MC} \sum_{i=1}^{MC} (\hat{\beta}_{i,1} - \beta_{real,1})^2} + \sqrt{\frac{1}{MC} \sum_{i=1}^{MC} (\hat{\beta}_{i,2} - \beta_{real,2})^2}}{2} \quad (11)$$

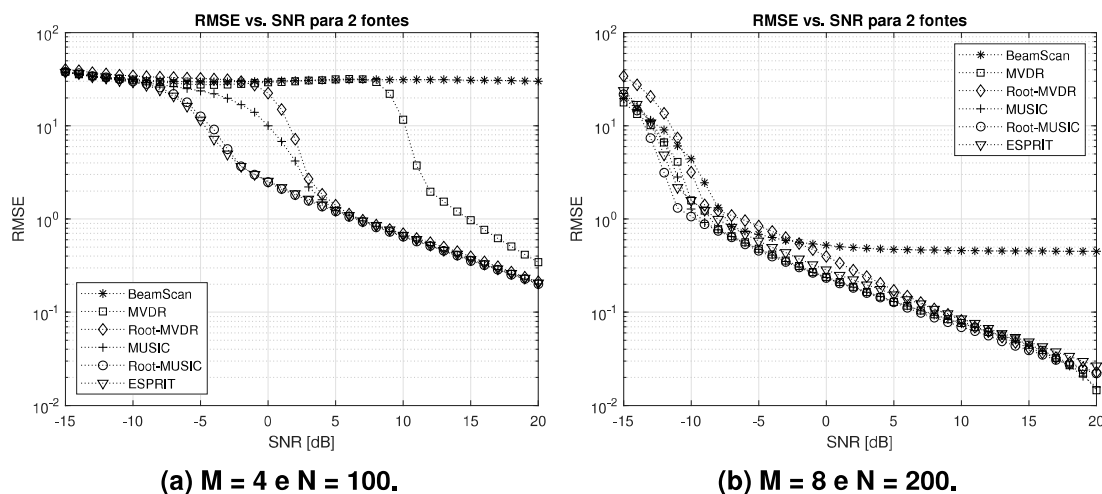


Figura 4: Avaliação do RMSE vs qualidade do sinal (SNR) para:  $D = 2$  (30 e 50 graus).

Novamente, dobrar o número de sensores e de *snapshots* trouxe ganhos de desempenho significativos para todas as técnicas. É importante destacar que só foi possível avaliar o BeamScan neste cenário devido a separação angular de 20° entre as fontes. Finalmente, conforme previsto na literatura, as técnicas paramétricas foram mais bem sucedidas em termos de capacidade de resolução e de precisão do que as não-paramétricas, ao custo de se precisar de informações *a priori*, como por exemplo, o número de fontes.

## 6. Conclusão

Neste trabalho foi apresentado a ferramenta de prototipagem SimPatico, a qual validou trabalhos encontrados na literatura. Em seguida, os resultados gerados pelo simulador evidenciaram que as técnicas paramétricas apresentam melhores desempenhos quando comparadas com as demais, entretanto, o Root-MVDR se apresentou como uma solução intermediária, aliando baixo tempo de execução e a não exigência de informações *a priori* dos sinais. A próxima etapa deste trabalho será a utilização do SimPatico para estimação de DoA em sinais medidos em ambientes reais.

<sup>2</sup>A respeito do desempenho muito pobre do algoritmo BeamScan, os ganhos só são perceptíveis para separação angular acima de 15°. Os resultados validaram o pseudo-espectro (Equação 5) do livro [Theodoridis et al. 2013]. Contudo, como os autores do livro não disponibilizam a curva de  $P_d$  vs SNR, os resultados foram omitidos.

## Referências

- Akbari, F., Shirvani Moghaddam, S., and Tabataba Vakili, V. (2010). Music and mvdr doa estimation algorithms with higher resolution and accuracy. In *2010 5th International Symposium on Telecommunications*, pages 76–81.
- Barabell, A. (1983). Improving the resolution performance of eigenstructure-based direction-finding algorithms. In *Acoustics, Speech, and Signal Processing, IEEE International Conference on ICASSP'83.*, volume 8, pages 336–339. Citeseer.
- Chung, P.-J., Viberg, M., and Yu, J. (2014). Chapter 14 - doa estimation methods and algorithms. In Zoubir, A. M., Viberg, M., Chellappa, R., and Theodoridis, S., editors, *Academic Press Library in Signal Processing: Volume 3*, volume 3 of *Academic Press Library in Signal Processing*, pages 599 – 650. Elsevier.
- Google (2018). Google Home Smart Speaker.
- Johnson, B. A., Abramovich, Y. I., and Mestre, X. (2008). Music, g-music, and maximum-likelihood performance breakdown. *IEEE Transactions on Signal Processing*, 56(8):3944–3958.
- Mahafza, B. R. (2013). *Radar Systems Analysis and Design Using MATLAB (3rd Edition)*. Chapman and Hall/CRC, 3 edition.
- Munoz, D., Lara, F. B., Vargas, C., and Enriquez-Caldera, R. (2009). *Position location techniques and applications*. Academic Press.
- Pan, C., Chen, J., and Benesty, J. (2014). Performance study of the mvdr beamformer as a function of the source incidence angle. *IEEE/ACM Transactions on Audio, Speech, and Language Processing*, 22(1):67–79.
- R. Roy, A. Paulraj, T. K. (1986). Estimation of signal parameters via rotational invariance techniques - esprit. *Proc.SPIE*, 0696:0696 – 0696 – 8.
- Rao, B. D. and Hari, K. V. S. (1989). Performance analysis of root-music. *IEEE Transactions on Acoustics, Speech, and Signal Processing*, 37(12):1939–1949.
- Schmidt, R. (1986). Multiple emitter location and signal parameter estimation. *IEEE Transactions on Antennas and Propagation*, 34(3):276–280.
- Schmidt, R. O. (1982). A signal subspace approach to multiple emitter location and spectral estimation.
- Spagnolini, U. (2018). *Statistical Signal Processing in Engineering*. Wiley, 3 edition.
- Theodoridis, S., Chellappa, R., Viberg, M., and Zoubir, A. (2013). *Academic Press Library in Signal Processing: Array and Statistical Signal Processing*. Academic Press Library in Signal Processing. Elsevier Science.
- Valin, J.-M., Michaud, F., Rouat, J., and Létourneau, D. (2003). Robust sound source localization using a microphone array on a mobile robot. 2:1228–1233.
- Van Trees, H. L. (2004). *Optimum array processing: Part IV of detection, estimation, and modulation theory*. John Wiley & Sons.
- Williams, C. (2017). How shotspotter locates gunfire, helps police catch shooters and works to ‘denormalize’ gun violence.