



**REPRESENTAÇÕES E RESOLUÇÃO DE SISTEMAS LINEARES 2 x 2 COM
INSTRUMENTOS MANUAIS E COM O SOFTWARE GEOGEBRA**

KÉZIA CRISTIANE DE MENDONÇA PEREIRA¹

MIQUÉIAS RODRIGUES BARBOSA²

EMANUEL GOMES LOURENÇO³

RICARDO ANTÔNIO FAUSTINO DA SILVA BRAZ⁴

RESUMO

O presente artigo discorre sobre o desenvolvimento de uma aula inédita ocorrida em uma turma da segunda série do Ensino Médio de uma escola da rede estadual de ensino do Rio Grande do Norte. A aula abordou o conteúdo de resolução de sistemas lineares do tipo 2×2 e objetivou, fundamentada na Teoria dos Registros de Representações Semióticas de Raymond Duval, proporcionar aos estudantes o conhecimento da representação geométrica das equações lineares com duas incógnitas e a determinação da solução de um sistema 2×2 , sem a necessidade da realização dos tradicionais cálculos algébricos. Além disso, durante a realização da aula, utilizou-se o aplicativo GeoGebra para smartphones para dar suporte aos estudantes na correção das atividades desenvolvidas. Como resultados, observou-se que, a realização da aula proporcionou aos estudantes envolvidos a oportunidade de conhecer e utilizar outros registros para representar e resolver sistemas lineares 2×2 .

Palavras-Chave: Registro de representação semiótica. Sistemas lineares 2×2 . Software GeoGebra.

ABSTRACT

This article discusses the development of an unprecedented class that took place in a 2nd grade high school class at a state school in Rio Grande do Norte. The class addressed the resolution content of linear systems of type 2×2 and sought, based on Raymond Duval's Theory of Semiotic Representation Records, to provide students with the knowledge of the geometric representation of linear equations with two unknowns and the determination of the solution of a 2×2 system without the need to perform algebraic calculations. In addition, during the class, used the GeoGebra application for smartphones to support students in correcting the activities developed. As a result, it was observed that the realization of the class provided the students involved with the opportunity to know and use other records to represent and solve 2×2 linear systems.

¹ Instituto GeoGebra Internacional do Rio Grande do Norte (IGIRGN) - keziacrist.m.p@gmail.com

² Instituto GeoGebra Internacional do Rio Grande do Norte (IGIRGN) - miqueiasrbarbosa42@gmail.com

³ Instituto Federal de Educação, Ciência e Tecnologia do Rio Grande do Norte (IFRN) – emanuel.lourenco@ifrn.edu.br

⁴ Universidade Federal Rural do Semi-Árido (UFERSA) – ricardobraz@ufersa.edu.br



Keywords: Registration of semiotic representation. linear systems 2×2 . GeoGebra software.

1 INTRODUÇÃO

O estudo dos sistemas lineares do tipo 2×2 é um tema bastante abordado na educação básica. Tal estudo, evidencia o papel social da Matemática uma vez que aponta soluções para diversos problemas de natureza prática existente no cotidiano e se constitui um tema bastante abordado, mesmo que essa abordagem ocorre tradicionalmente por meio de processos algébricos sem nenhuma vinculação ao envolvimento da geometria.

Nesse sentido, a Base Nacional Comum Curricular (BNCC), documento oficial norteador dos conteúdos abordados na Educação Básica, aponta entre as competências a serem desenvolvidas pelos estudantes do Ensino Médio, na área de Matemática, a compreensão e utilização, com flexibilidade e precisão de diferentes registros de representação matemáticos como o algébrico, o geométrico, o estatístico e o computacional, na busca de solução e comunicação de resultados de problemas (BRASIL, 2018).

Frente ao contexto, o presente artigo apresenta o desenvolvimento de uma aula abordando o conteúdo de sistema linear do tipo 2×2 , além de analisar o desempenho dos estudantes envolvidos na realização das atividades desenvolvidas no decorrer da aula. O objetivo da aula foi proporcionar aos estudantes a percepção de que os sistemas lineares tipo 2×2 podem ser representados e resolvidos tanto por meio de processos algébrico como por meio de construções geométricas, além de investigar como essa percepção pode contribuir para a melhoria do desempenho dos estudantes na resolução de problemas que podem ser representados utilizando os sistemas 2×2 .

Objetivou-se ainda com esse trabalho, contribuir com a produção científica na área de educação matemática, fornecendo aportes para futuros estudos que tratem da resolução de sistemas por meio de representação geométrica. A fim de se alcançar esse propósito, elaborou-se uma sequência didática composta por tarefas de representação de equações lineares, resolução de problemas, manipulação de materiais concretos e utilização de tecnologia digital para a produção de desenhos geométricos.

É importante mencionar que a tecnologia digital utilizada na aula, foi o aplicativo GeoGebra, por conhecer-se suas funcionalidades e considerar-se ser adequado a aprimorar as



construções manualmente realizadas, permitindo a verificação do aprendizado e otimizando a construção dos conhecimentos.

Já a escolha do conteúdo abordado se justifica em virtude deste, além de integrar a estrutura curricular da série na qual desenvolveu-se a pesquisa, ser um conhecimento bastante aplicado na resolução de problemas do cotidiano.

No tocante a forma de abordagem do conteúdo, esta teve sua motivação em observações em sala de aula que sinalizaram um maior envolvimento dos estudantes nas atividades, quando essas envolvem a manipulação de objetos e a utilização de recursos tecnológicos. Além disso, buscou-se proporcionar aos estudantes, aulas mais dinâmicas com foco em uma aprendizagem mais aproximada do objeto de estudo por meio de diferentes representações, o que remete a aplicação prática da Teoria dos Registros de Representações Semióticas, de Raymond Duval.

2 REVISÃO BIBLIOGRÁFICA

Nesta seção, apresentam-se os aportes teóricos nos quais este artigo está fundamentado. Nela se encontram alguns estudos acerca da aprendizagem Matemática, do uso de tecnologias digitais na educação, da utilização do software GeoGebra e de concepções atreladas a Teoria dos Registros de Representação Semiótica de Raymond Duval.

2.1 A APRENDIZAGEM MATEMÁTICA, AS TECNOLOGIAS DIGITAIS E O GEOGEBRA.

A forma como a Matemática foi ensinada e aprendida passou por várias transformações ao longo dos séculos, migrando muitas vezes de uma abordagem prática para a realização de cálculos abstratos ou ainda da valorização da representação geométrica para a representação algébrica.

Além das perspectivas de como a Matemática tem sido ensinada e aprendida, pode-se ainda perceber, ao estudar a história dessa ciência, que muitos foram os utensílios utilizados para auxiliar na sua compreensão, a exemplo da utilização do próprio corpo, do emprego de elementos oferecidos pela natureza ou de instrumentos criados pelo homem (tecnologias).

Contudo, apesar dos diversos desdobramentos pelos quais passou o ensino dessa ciência, muito se comenta sobre as dificuldades enfrentadas pelos estudantes para aprender Matemática. Na Grécia antiga, acreditava-se que a compreensão dos cálculos matemáticos provinha de



mentes dotadas de conhecimentos reservados apenas a espíritos talentosos, o que conferia a essa ciência uma conotação mística e que imbuíu no pensamento de muitos, e por muito tempo, que o seu domínio era para poucos (MIORIM, 1995), o que se deixava entender que aprender Matemática era uma tarefa difícil para a maioria das pessoas.

Segundo estudos de Sanchez (2004) e Pacheco e Andreis (2018), crenças como essas figuram entre as causas de dificuldades no aprendizado da Matemática, ao lado de outros fatores como: dificuldades relacionadas ao desenvolvimento cognitivo, dificuldades geradas pelo ensino inadequado, condições insuficientes oferecidas pela escola, pouca dedicação aos estudos e omissão da família à vida escolar do aluno.

Frente a tantos problemas que geram resultados insatisfatórios na aprendizagem Matemática, muitos professores têm buscado alternativas para a motivação dos estudantes e o comprometimento com o trabalho escolar com vistas a um aprendizado significativo e duradouro.

Nessa busca pelo envolvimento dos estudantes com sua própria formação, as tecnologias digitais (TDs) têm sido utilizadas como recursos motivacionais e pedagógicos, uma vez que estas, estão cada vez mais presentes no cotidiano dos estudantes.

Apesar das várias utilidades que se fazem das TDs o seu uso para fins pedagógicos ainda é limitado, conforme afirmaram Maltempi e Mendes (2016) quando expuseram que, mesmo que seja inegável a influência das tecnologias digitais na vida das pessoas, estranhamente a sala de aula pouco mudou nas últimas décadas por influência dessas tecnologias. Para esses autores, esse fato se deve, dentre outros aspectos, a fatores ligados a formação do professor; as precárias condições de trabalho vivenciadas na educação; a políticas públicas equivocadas, descontinuadas ou inexistentes; a ausência de investimento financeiro contínuo; a visão ultrapassada sobre a educação e, por fim, a resistência a mudança. No entanto, esses mesmos autores afirmam que, houve a percepção por parte de alguns matemáticos e educadores matemáticos de que as tecnologias informatizadas poderiam ter um efeito positivo no ensino da Matemática (MALTEMPI; MENDES, 2016).

Contudo, sabe-se que as tecnologias por si só não garantem a geração de resultados satisfatórios em termos de aprendizagem matemática; sendo necessário ao seu bom emprego a elaboração de um planejamento articulando as funcionalidades do instrumento tecnológico escolhido, com os conteúdos a serem abordados, as estratégias metodológicas a serem utilizadas



e os objetivos que se pretende alcançar. Essas tecnologias digitais, conforme Maltempi e Mendes:

propiciaram uma diversificação de práticas pedagógicas, acompanhadas de pesquisas em Educação Matemática visando analisar o uso das TDs na educação, o desenvolvimento de teorias específicas e a adaptação de teorias existentes, de forma cada vez mais abrangente, incluindo o professor e sua formação, o aprendiz e toda a comunidade. (MALTEMPI; MENDES, 2016 p.3).

A exemplo do que afirmaram Maltempi e Mendes sobre as TDs, a plataforma GeoGebra tem surgido em diversas publicações no campo da Educação Matemática como instrumento de pesquisas, aliadas a teorias de aprendizagens, visando estudar as formas como os estudantes aprendem e com isso, fornecendo contribuições relevantes para o ensino da Matemática.

Sobre o GeoGebra, pode-se afirmar que, conforme a página oficial na rede mundial de computadores, se caracteriza como “um software de matemática dinâmica para todos os níveis de ensino que reúne Geometria, Álgebra, Planilha de Cálculo, Gráficos, Probabilidade, Estatística e Cálculos Simbólicos em um único pacote fácil de se usar” (GEOGEBRA, 2020). Uma das facilidades em se utilizar o GeoGebra em estudos, pesquisas e abordagens em sala de aula, é o fato de o software ser gratuito e poder ser utilizado em dispositivos móveis, o que facilita consideravelmente a sua utilização como recurso didático, dada a atual popularização dos smartphones entre a população jovem em idade escolar.

Ainda sobre esse software, de acordo com Meneghelli e Possamai (2019, p. 4):

São muitas as vantagens de se utilizar o GeoGebra, das quais destaca-se o fato de permitir aos seus usuários a realização de manipulações em suas construções, preservando as características iniciais, visando uma melhor exploração e visualização das propriedades do objeto que se deseja estudar. (MENEHELLEI; POSSAMAI, 2019, p. 4).

Além disso, o GeoGebra permite múltiplas representações de um mesmo objeto matemático, proporcionando uma visão ampla do que está sendo estudado. Característica esta, que se adequa a realização de estudos que tenham como foco, verificar contribuições das representações semióticas no ensino de conteúdos matemáticos, isso considerando as concepções encontradas no tópico a seguir.

2.2 A TEORIA DOS REGISTROS DE REPRESENTAÇÃO SEMIÓTICA

Desenvolvida pelo psicólogo e filósofo francês Raymond Duval, a Teoria dos Registros de Representação Semiótica, visa realizar análises sobre a influência de representações de objetos matemáticos no processo de ensino e aprendizagem de Matemática. (PANTOJA; CAMPOS; SALCEDOS, 2013).

Para o criador dessa teoria, os registros de representações semióticas são definidos como “produções constituídas pelo emprego de signos pertencentes a um sistema de representações” (DUVAL, 1993, p. 39). Duval (2003), afirmou ainda que a evolução dos conhecimentos matemáticos promoveu o desenvolvimento e a diversificação dos registros de representação.

Para que se possa melhor entender as palavras de Duval, recorreu-se, para escrita deste texto, a um dos precursores de sua teoria, o americano Charles Peirce, que também estudou as representações semióticas e definiu signo como sendo “aquilo que, sob certo aspecto ou modo, representa algo para alguém” (PEIRCE, 2005, p. 46). Foi Pierce que também esclareceu que representar é “estar em lugar de, isto é, estar numa relação com um outro, que, para certos propósitos, seja considerado por uma mente como se fosse esse outro” (PEIRCE, 2005, p. 61).

Com isso, entende-se os registros de representações semióticas como formas de representação de um determinado objeto, no qual, no caso da teoria de Duval, se aplica a um objeto matemático. Na realidade, os objetos matemáticos podem ser representados em diferentes registros, como por exemplo, por meio da linguagem oral e/ou escrita, por símbolos algébricos e/ou geométricos, dentre outros. Embora, como disse Peirce (2005), uma forma de registro não representa um dado objeto em sua totalidade, sendo cada registro a representação de um ou de alguns dos aspectos observados no objeto. Daí, compreende-se que, quanto maior o número de registros utilizados no estudo de um objeto, mais nos aproximamos da compreensão total desse.

Tais afirmações corroboram com o pensamento expresso por Duval quando afirmou que “a originalidade da atividade matemática está na mobilização simultânea de ao menos dois registros de representação ao mesmo tempo, ou na possibilidade de trocar a todo momento de registro de representação” (DUVAL, 2003, p.14).

A essa troca de registro, Duval denominou conversão, para ele, as conversões são responsáveis pela construção do conhecimento e são conceituadas como transformações de representações conservando os mesmos objetos, como exemplo de conversão esse autor citou que reconhecer a escrita algébrica de uma equação em sua representação gráfica constitui-se uma conversão (DUVAL, 2003).



Outro conceito importante vinculado a Teoria dos Registros de Representação Semiótica consiste na definição de tratamento. Os tratamentos foram conceituados por Duval como “transformações de representações dentro de um mesmo registro, por exemplo: efetuar um cálculo ficando estritamente no mesmo sistema de escrita ou de representação” (DUVAL, 2003, p. 16).

A partir dos conceitos de conversão e tratamento, observados no estudo da Teoria dos Registros de Representações Semióticas, desenvolveu-se uma aula inédita, na qual, utilizou-se duas representações diferentes de um mesmo objeto matemático (sistema linear do tipo 2×2) afim que promover a construção do conhecimento acerca do objeto estudado.

3 METODOLOGIA

O desenvolvimento da aula inédita abordando o tema sistemas lineares do tipo 2×2 , com fundamentação na Teoria dos Registros de Representações Semióticas de Raymond Duval e utilizando instrumentos manuais e o GeoGebra, ocorreu no ano de 2019 em uma turma da segunda série do Ensino Médio do turno matutino da Escola Estadual Professora Josefa Sampaio, localizada no município de Natal/RN.

No período da realização da pesquisa, a turma com a qual interagiu-se contava com 16 estudantes frequentando. Considera-se ser importante mencionar que 3, dentre os 16 estudantes da turma, eram pessoas com deficiências comprovadas, a saber: dois com esquizofrenia e uma com discalculia.

Para a realização da aula, elaborou-se uma sequência didática composta de três etapas, as quais foram: preparação, desenvolvimento e avaliação do aprendizado. Durante todo o percurso da aula objetivou-se a troca de saberes entre os estudantes e assim, optou-se pela organização dos estudantes em duplas desde a etapa de preparação.

A etapa de preparação ocorreu no dia 02/12, com a participação de 13 estudantes, tendo um deles realizado a tarefa individualmente por opção pessoal. Com a duração de uma hora/aula, essa etapa caracterizou-se pelo trabalho de realização de download do aplicativo GeoGebra para smartphones e pela aplicação de uma tarefa para o conhecimento do software e de suas funções necessárias a realização das construções geométricas dos sistemas 2×2 . Essas atividades foram desenvolvidas a partir de orientações expostas com o auxílio de slides. As orientações para conhecimento do software foram expostas na forma de um checklist contendo dez procedimentos os quais foram: exibir e ocultar os eixos, exibir e ocultar a malha, mover



janela de visualização, marcar um ponto no plano e determinar suas coordenadas, alterar a cor do ponto criado, criar uma reta marcando dois pontos no plano, identificar a representação algébrica da reta criada, criar uma reta por meio de uma equação (representação algébrica), identificar se há ponto de intersecção entre as retas formadas e identificar as coordenadas do ponto de intersecção (caso existam).

A etapa de desenvolvimento ocorreu nos dias 03 e 04 de dezembro. No dia 03/12 contou com a participação de 15 estudantes, 14 organizados em duplas e 1 trabalhando individualmente, também por opção pessoal. Nessa etapa, houve a realização de uma pesquisa utilizando livros didáticos e internet, a fim de que os estudantes compreendessem/revisassem o conceito de equação linear e em seguida apresentassem exemplos. A finalidade dessa atividade consistia em promover a revisão/apropriação desses conhecimentos e reforçava o reconhecimento da representação algébrica das equações lineares.

Ainda no dia 03/12, fazendo uso de um projetor e de slides, realizou-se uma rápida exposição visando orientar os estudantes a executarem o tratamento (transformações de representações dentro de um mesmo registro) das equações lineares com duas incógnitas para que se pudessem representá-las no plano cartesiano, ou seja, para realizar a troca de registro (conversão). Na sequência propôs-se a realização de uma tarefa onde os estudantes deveriam representar geometricamente no plano cartesiano, utilizando folhas milimetradas, quatro equações, dentre 15 equações lineares com duas incógnitas que se encontravam expostas nos slides. O propósito da realização dessa atividade consistiu em, primeiramente escrever as equações lineares como equações de retas em seguida fazer a representação geometricamente.

No dia 04/12, com 14 estudantes organizados em dupla, distribuiu-se uma tarefa impressa, previamente elaborada, na qual se encontravam cinco questões. Essas questões, propunham a resolução de situações problemas que simulavam situações do cotidiano dos estudantes e cujas soluções poderiam ser obtidas por meio da utilização dos conhecimentos de representação e resolução de sistemas de equações lineares, do tipo 2×2 .

As questões 1 e 2 da atividade não solicitavam ou indicavam a utilização de um método específico a ser aplicado a fim de se obter os resultados dos problemas, conforme se vê no Quadro 1 a seguir:

Quadro 1 – Questões 1 e 2 da atividade 2 da fase de desenvolvimento

Determine a solução dos problemas 1 e 2 dados a seguir:

1) Cláudio usou notas de R\$ 2,00 e de R\$ 5,00 para fazer um pagamento de R\$ 40,00. Quantas notas de cada tipo ele usou sabendo que no total ele usou 11 notas?



2) Em uma prova com 14 questões de múltipla escolha, cada resposta correta vale 5 pontos e cada resposta errada acarreta uma perda de 3 pontos. Se Amanda obteve pontuação final igual a 22 pontos, quantas questões ela acertou e quantas ela errou?

Fonte: Elaborado pelos autores (2020)

Intencionalmente, nas questões 1 e 2, buscou-se verificar qual(is) a(s) forma(s) de resolução seria mais utilizada(s) pela turma.

Já as questões 3 e 4 solicitavam aos estudantes, que esses deveriam representar os problemas enunciados, por meio de um sistema de equações lineares do tipo 2×2 e em seguida, que as duas equações de um mesmo sistema deveriam ser representadas geometricamente em uma mesma folha milimetrada e que fosse(m) identificado(s) o(s) ponto(s) de intersecção das retas construídas e, por fim, que a solução do sistema fosse determinada. Além disso, ao final das questões 3 e 4 havia um espaço para que os estudantes pudessem registrar suas observações, como mostra o Quadro 2.

Quadro 2 – Questões 3 e 4 da atividade 2 da fase de desenvolvimento

Em cada uma das questões 3 e 4 realize os procedimentos a seguir:

- 1. Represente o problema na forma de sistema linear.**
- 2. Determine a solução do sistema**
- 3. Represente geometricamente as duas equações do sistema em uma mesma folha milimetrada.**
- 4. Identifique o ponto de intersecção das retas formadas.**
- 5. Registre no espaço indicado alguma observação feita pela dupla a partir da realização desse procedimento nas duas questões.**

3) Em um estacionamento há 10 veículos, entre carros e motos. Sabe-se que o número total de pneus são 28. Descubra o número de carros e motos estacionadas no local.

4) Para uma festa na sala de aula da professora Silvia foram compradas 5 unidades de refrigerantes, algumas de 2 litros e outras de 3 litros, num total de 12 litros da bebida. Determine quantas unidades de cada capacidade foram compradas.

Observações: _____

Fonte: Elaborado pelos autores (2020)

A indicação do procedimento a ser adotado nas questões 3 e 4 da atividade, demonstra que intencionalmente desejou-se, além de pôr em prática o estudo abordado no dia anterior, verificar se os estudantes iriam perceber alguma relação entre a representação geométrica construída e solução algébrica a ser calculada para cada sistema.



No tocante a questão de número 5, essa solicitava aos estudantes que eles obtivessem a solução do problema proposto, utilizando a forma que eles considerassem melhor de ser desenvolvida pela dupla. Essa questão encontra-se no Quadro 3, abaixo.

Quadro 3 – Questão 5 da atividade 2 da fase de desenvolvimento

Determine a solução do problema 5, utilizando a forma que a dupla considera a melhor de ser trabalhada.

5) Dois amigos foram a uma mesma lanchonete duas vezes durante o mês de férias, na primeira vez eles pagaram o valor de R\$ 18,00 e na segunda vez pagaram um total de R\$ 28,00. Na primeira vez, eles comeram 2 sanduiches e tomaram 3 refrigerantes e na segunda vez, eles comeram 3 sanduiches e tomaram 5 refrigerantes. Sabendo que durante o período de férias os preços do sanduiche e do refrigerante permaneceram inalterados calcule o valor de cada um.

Fonte: Elaborado pelos autores (2020)

A intencionalidade dessa questão foi a de descobrir que forma de resolução seria mais utilizada entre os estudantes da turma.

Finalizada a etapa de desenvolvimento, realizou-se a avaliação do aprendizado no dia 05/12, contando com a participação dos 16 estudantes que compunham a turma. A proposta para essa etapa foi a de que os alunos realizassem a mesma atividade desenvolvida no dia anterior, só que desta vez utilizando o GeoGebra, a fim de se fazer a comparação dos resultados.

Na sequência as duplas registraram em uma folha de papel o que aprenderam, como aprenderam e as dificuldades enfrentadas nas etapas da aula.

Vale ressaltar que os dois estudantes que não se encontravam presentes na aula anterior, mas que participaram dessa etapa, foram agregados cada um a uma dupla, formando-se assim, cinco duplas e dois trios, a fim de que se promovesse algum conhecimento a eles.

4 RESULTADOS E DISCUSSÕES

Para análise do desempenho obtido pelos estudantes durante a realização das três etapas da aula inédita exposta nesse artigo, os 16 estudantes com os quais interagiu-se estão identificados pela seguinte designação: E1 para estudante 1, E2 para estudante 2 e assim sucessivamente até E16. A ordem utilizada para a essa designação foi baseada na sequência dos nomes desses estudantes apresentada pelo Sistema Integrado de Gestão da Educação

(Sigeduc), meio eletrônico utilizado pelas escolas estaduais do Rio Grande do Norte, onde se registram, além de outras atividades, as frequências e notas dos alunos.

Por perceber-se que a frequência dos estudantes no período da pesquisa, e a forma de organização dos componentes da turma, dentre outros fatores, influenciaram nos resultados, elaborou-se o Quadro 4, que mostra a disposição dos alunos em cada data de realização da aula inédita. Os espaços tracejados no quadro devem ser compreendidos como a ausência do estudante na data especificada no alto da coluna.

Quadro 4 – Organização e frequência dos estudantes

IDENTIFICAÇÃO	FORMA DE ORGANIZAÇÃO POR DATA			
	02/12	03/12	04/12	05/12
E1*	Individual	-	-	Trio E1, E8 e E12
E2	Dupla com E3	Dupla com E3	Dupla com E3	Dupla com E3
E3	Dupla com E2	Dupla com E2	Dupla com E2	Dupla com E2
E4	Dupla com E9	Dupla com E9	Dupla com E9	Dupla com E9
E5	Dupla com E6	Dupla com E6	Dupla com E6	Dupla com E6
E6	Dupla com E5	Dupla com E5	Dupla com E5	Dupla com E5
E7	Dupla com E11	Dupla com E11	Dupla com E11	Dupla com E11
E8	Dupla com E12	Dupla com E12	Dupla com E12	Trio E1, E8 e E12
E9	Dupla com E4	Dupla com E4	Dupla com E4	Dupla com E4
E10*	-	Dupla com E13	-	Trio E10, E13 e E15
E11	Dupla com E7	Dupla com E7	Dupla com E7	Dupla com E7
E12	Dupla com E8	Dupla com E8	Dupla com E8	Trio E1, E8 e E12
E13	-	Dupla com E10	Dupla com E15	Trio E10, E13 e E15
E14	Dupla com E16	Dupla com E16	Dupla com E16	Dupla com E16
E15*	-	Individual	Dupla com E13	Trio E10, E13 e E15
E16	Dupla com E14	Dupla com E14	Dupla com E14	Dupla com E14
FREQUENCIA	13	15	14	16

*Pessoa com deficiência.

Fonte: Elaborado pelos autores (2020)

Como se pôde observar, em virtude da ausência de alguns alunos em determinadas datas, houve, no percurso das etapas da aula, a necessidade da realização de tarefas de forma

individual, por reorganização de duplas e pela formação de trios, isso objetivando sempre a participação de todos os presentes.

No tocante as tarefas desenvolvidas pelos estudantes nos dias especificados no quadro anterior, o Quadro 5 apresenta o resumo do planejamento relacionando datas, tarefas e os objetivos propostos.

Quadro 5 – Resumo do planejamento da aula inédita

DATA	TAREFA DESENVOLVIDA	OBJETIVOS PROPOSTO
02/12	Realizar 10 procedimentos utilizando o software GeoGebra.	Promover o conhecimento do aplicativo e de suas funcionalidades.
03/12	Representar geometricamente 4 equações lineares no plano cartesiano utilizando folhas milimetradas.	Realizar a troca de registro do objeto matemático equação linear com duas incógnitas.
04/12	Representar e resolver de 5 problemas matemáticos envolvendo o conteúdo de sistemas lineares do tipo 2×2 por meio de diferentes e registros.	Estimular a percepção dos estudantes para a determinação da solução de sistemas lineares do tipo 2×2 por meio de sua representação geométrica.
05/12	Utilizar o aplicativo GeoGebra, para representar e geometricamente situações problemas de sistemas lineares do tipo 2×2 anteriormente resolvidos.	Oportunizar aos estudantes a correção de suas atividades e a auto avaliação do seu desempenho.

Fonte: Elaborado pelos autores (2020)

Por meio da leitura do Quadro 5 percebe-se que, por se organizarem na forma de uma sequência didática, o êxito na realização de uma tarefa influenciaria positivamente na realização das tarefas seguintes, assim como o mal desempenho ou a ausência do estudante na data da realização de uma tarefa poderia refletir negativamente nos resultados do desempenho de atividades realizadas em datas posteriores.

Nesse sentido, optou-se por considerar nas análises realizadas, apenas os dados originados a partir da observação da atuação de 12 estudantes da turma, visto que estes participaram de todas as etapas do processo de aprendizagem.

Os resultados obtidos por esses 12 estudantes foram analisados em função do desempenho das duplas em cada etapa, visto que ao realizarem o trabalho com o auxílio de um colega os estudantes compartilham conhecimentos, influenciam e são influenciados na forma de desenvolvimento das atividades e isso apresenta reflexos no resultado final do desempenho da dupla.

A apresentação dos resultados obtidos por cada dupla será retratada por dados quantitativos vinculados ao percentual de cumprimento das tarefas indicadas em cada etapa, seguidos, de considerações acerca do alcance dos objetivos planejados.

Os resultados referentes à etapa 1 estão dispostos de forma percentual na Tabela 1 e foram originados a partir do tratamento das informações constantes nos checklist distribuídos aos estudantes durante a realização da tarefa de execução dos dez procedimentos adotados para promover o conhecimento do aplicativo GeoGebra. Todos os registros nos checklist foram assentados sob supervisão e encontravam-se em forma de marcações que geraram os resultados apresentados.

Tabela 1 – Resultados percentuais obtidos na etapa 1

DUPLAS	RESULTADO OBTIDO NA ETAPA 1
E2 e E3	100%
E4 e E9	80%
E5 e E6	100%
E7 e E11	100%
E8 e E12	100%
E14 e E16	60%

Fonte: Dados dos autores (2020)

Para etapa 1 o quantitativo do cumprimento das tarefas dimensiona o quanto do objetivo proposto foi alcançado pelas duplas, uma vez que ao desempenhar acertadamente a atividade de manipular o aplicativo GeoGebra, por meio das construções propostas promoveu-se o conhecimento das funcionalidades do software.

No tocante a etapa 2, onde se propôs inicialmente a realização da tarefa de representação geométrica de 4 equações lineares com duas incógnitas em folhas milimetradas, os percentuais obtidos pelas duplas estão representados na Tabela 2.

Tabela 2 – Resultados percentuais obtidos na tarefa 1 da etapa 2

DUPLAS	RESULTADO
E2 e E3	100%
E4 e E9	50%
E5 e E6	75%
E7 e E11	75%
E8 e E12	100%
E14 e E16	50%

Fonte: Dados dos autores (2020)



Os resultados apontados na Tabela 2 demonstram, que, a maioria das duplas compreendeu do procedimento para representação geométrica de equações lineares com duas incógnitas. Ressalta-se que, no trabalho da dupla composta por E4 e E9 percebeu-se erros na numeração dos eixos de coordenadas o que ocasionou uma representação errônea das retas.

Quanto as duplas formadas por E5 e E6, por E7 e E11 e por E14 e E16, essas não realizaram a atividade integralmente, tendo as duplas E5 e E6, e E7 e E11 deixado de representar uma das quatro equações e a dupla E14 e E16, representado apenas uma.

Mesmo que a atividade não tenha sido realizada por todas as duplas na sua integralidade, compreendeu-se que houve o alcance dos objetivos, pois pela análise das partes da atividade que foram concluídas, percebeu-se que os estudantes entenderam e realizaram a troca de registro nas equações.

A respeito dos resultados obtidos pelos estudantes na tarefa 2 da etapa de desenvolvimento, sentiu-se a necessidade de melhor detalhar que parte(s) da atividade de resolução de problemas foi(ram) desempenhada(s) com êxito por cada dupla, a fim de que se pudesse determinar o percentual de acertos, tecer comentários sobre alcance dos objetivos e analisar o comportamento dos estudantes ao tentar resolver as questões, conforme o que se intencionou descobrir ao elaborar o planejamento. Nesse sentido, os resultados da atividade desenvolvida no segundo dia da etapa 2 encontram-se apresentados na Tabela 3, onde, na linha referente a cada dupla a marcação em x indica que a dupla encontrou a solução correta do problema e a marcação em forma de traço, indica que, ou o problema não foi resolvido ou a solução apresentada não foi a correta.

Tabela 3 – Resultados obtidos na tarefa 2 da etapa 2

DUPLAS	PROBLEMAS RESOLVIDOS NA ETAPA 2					PERCENTUAL ATINGIDO
	1	2	3	4	5	
E2 e E3	x	x	x	x	x	100%
E4 e E9	x	x	-	-	-	40%
E5 e E6	x	x	x	x	-	80%
E7 e E11	x	x	x	x	x	100%
E8 e E12	x	x	x	x	x	100%
E14 e E16	x	x	x	-	-	60%

Fonte: Dados dos autores (2020)

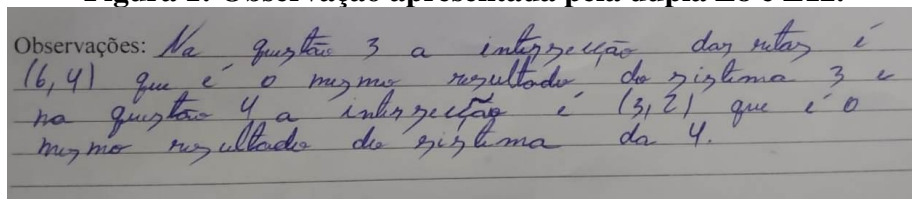
Conforme se observa na Tabela 3 a dupla formada por E4 e E9 não conseguiu atingir o percentual de 60% de êxito, percentual mínimo esperado, na realização da tarefa 2. A dupla utilizou o método de tentativa e erro para tentar resolver os dois primeiros problemas da atividade, não tendo representado os problemas nem por meio do registro algébrico e nem pela forma geométrica, o que demandou muito tempo na determinação da solução, o que, segundo eles, tornou o restante do tempo insuficiente para a realização dos outros itens da atividade.

Outra dupla que não apresentou representação algébrica ou geométrica dos dois primeiros problemas foi a dupla composta por E8 e E12. Apesar disso, esses estudantes determinaram a solução dos problemas 1 e 2 e, questionados sobre a forma utilizada para determinar a solução, os estudantes descreveram a solução efetuando apenas cálculos rápidos sem um padrão definido de registro do sistema.

Quanto a resolução dos problemas 1 e 2 por parte das demais duplas, todas representaram os sistemas na forma algébrica e procederam corretamente utilizando o tratamento do registro algébrico para determinação das suas soluções. Com isso, concluiu-se que o trato algébrico se constitui como o mais utilizados pelos estudantes na resolução de problemas dessa natureza, e aponta para a utilização mais difundida dessa prática entre aqueles estudantes.

No que tange ao trato dos problemas 3 e 4, como se pode observar na Tabela 3, quatro das seis duplas realizaram satisfatoriamente o que se propôs. Contudo, apenas a dupla formada por E8 e E12 registrou no espaço destinado as observações, a percepção de uma relação existente entre o ponto de intersecção das retas que representavam equações lineares de um mesmo sistema e a solução algébrica para esse sistema, conforme se vê na Figura 1.

Figura 1: Observação apresentada pela dupla E8 e E12.



Observações: Na questão 3 a interseção das retas é $(6, 4)$ que é o mesmo resultado do sistema 3 e na questão 4 a interseção é $(3, 2)$ que é o mesmo resultado do sistema da 4.

Fonte: Dados dos autores (2019)

Quanto a questão 5, quatro duplas realizaram procedimentos de resolução, foram elas: E2 e E3, E5 e E6, E7 e E11, e E8 e E12. Contudo, a dupla formada por E5 e E6, não determinou



a solução adequada para o problema. Destaca-se que, nos quatro procedimentos observados, o cálculo algébrico foi o único a aparecer, no que se conclui que, não houve percepção por parte da maioria dos estudantes de que a representação geométrica das duas equações de um mesmo sistema em um mesmo plano consistia na resolução do sistema.

Outra observação acerca da resolução dada a questão 5, refere-se a forma de desenvolvimento realizado pela dupla E8 e E12, visto que, apesar da dupla ter demonstrado perceber a relação existente entre o ponto de intersecção das retas e a solução do sistema, essa deu preferência a resolução por meio do tratamento algébrico.

Tais observações acerca das questões da segunda atividade da etapa 2, levam a conclusão de que o objetivo proposto para essa atividade não foi alcançado, já que não existem indícios de que a maioria dos estudantes percebeu que o ponto de intersecção entre duas retas, que representavam equações de um mesmo sistema, coincidem com o a solução do sistema obtida pelo tratamento algébrico.

Concluídas as observações acerca do desenvolvimento da etapa 2, passa-se a análise do trabalho desenvolvido na etapa 3 da aula inédita que, apesar de ter sido denominada por etapa de avaliação do aprendizado, ela também se constituiu como uma etapa de construção do conhecimento, uma vez que por ocasião da sua realização a maioria dos estudantes conseguiu identificar o ponto de intersecção de duas retas, que representam equações do mesmo sistema, como sendo a solução do sistema.

Para melhor compreensão de como esse fato foi percebido durante a realização da etapa 3, discorre-se a seguir sobre o desempenho apresentado por cada dupla durante a realização da atividade utilizando o aplicativo GeoGebra.

Inicialmente deve-se esclarecer que, para a realização das construções, utilizando o GeoGebra, das representações geométrica das equações lineares originadas a partir dos problemas trabalhados na etapa 2, a maioria dos estudantes utilizou as equações já construídas por eles, exceto: 1) na representação do problema 1, por parte das duplas compostas por E4 e E9 e por E8 e E12, que resolveram o problema sem a utilização da representação e do tratamento algébrico de sistema linear e, 2) nos casos em que duplas não haviam resolvido todos os problemas da etapa 2.

No início da etapa 3, ao representar geometricamente o sistema originado a partir do problema 1, a dupla E2 e E3 questionou a professora se o ponto de intersecção entre retas iria sempre coincidir com a solução do sistema, a dupla acrescentou ainda que se isso ocorresse



sempre, seria possível resolver qualquer sistema “desenhando” as retas no plano cartesiano. Essa dupla realizou toda tarefa e comparou ainda os resultados obtidos no aplicativo com aqueles construídos na folha de papel.

A dupla E4 e E9 só conseguiu representar os problemas 1, 2 e 3 na forma algébrica de um sistema de equações lineares, com o auxílio da professora. Após esse auxílio, a dupla conseguiu representar geometricamente as equações no aplicativo e identificar a intersecção de duas equações de um mesmo sistema, porém não estabeleceram nenhuma relação entre esse ponto de intersecção e a resolução do sistema. A dupla conseguiu, com alguma dificuldade, representar o problema 4 na forma algébrica de sistema linear sem a ajuda da professora e também representá-lo geometricamente, porém não trabalhou no problema 5. Com isso, acredita-se que a dupla não apresentava os conhecimentos prévios necessários a realização da tarefa.

Quanto a dupla E5 e E6, ela realizou toda a atividade da etapa 3, mas seus integrantes só fizeram menção de haver percebido que a solução dos sistemas, obtidas pela realização dos cálculos algébricos coincidia com os valores de x e y do ponto de intersecção das retas, após a representação da questão 3 realizada no aplicativo e a comparação com a resolução nas folhas de papel. A dupla também teve a oportunidade e perceber o erro cometido na resolução da questão 5 da atividade 2 na etapa 2.

As observações registradas acerca do desempenho da dupla E7 e E11, indicam que ao representar geometricamente, no aplicativo, o sistema referente ao problema 1, a dupla também questionou a professora se o ponto de intersecção entre retas sempre coincidia com a solução do sistema. Esta dupla completou toda a etapa 3.

Sobre a atuação da dupla E8 e E12 na realização das atividades da etapa 3, percebeu-se agilidade na execução das tarefas e a compreensão, durante toda etapa, de que o ponto de intersecção de duas retas que representavam as equações de um mesmo sistema indicava a solução do sistema, conforme registrado pela própria dupla durante a realização da etapa 2.

Acerca do desempenho apresentado pelo par formado por E14 e E16 durante a atividade com a utilização do aplicativo, observou-se que esses estudantes compreenderam que os sistemas lineares podem ser resolvidos por meio de representações geométricas. Esses estudantes completaram a etapa extrapolando um pouco do tempo previsto para sua realização.

Conforme se pôde observar, a realização da atividade com o GeoGebra proporcionou aos estudantes, além de uma avaliação de seu desempenho na etapa anterior, o aprendizado de outra forma de resolução de sistemas lineares do tipo 2×2 . Essa afirmação pode ser comprovada por meio da observação do Quadro 6 onde são encontrados os depoimentos acerca do aprendizado e que foram registrados em folhas de papel pelos próprios estudantes ao final da etapa 3 da aula.

Quadro 6 – Avaliação feita pelas duplas

DUPLA	O QUE APRENDEU	COMO APRENDERAM	DIFICULDADES
E2 e E3	Aprendemos que as equações podem ser transformadas em retas e os sistemas podem ser resolvidos olhando o encontro das retas	No GeoGebra	Desenhar bem direitinho na folha milimetrada.
E4 e E9	Fazer retas com as equações	No aplicativo GeoGebra	Fazer o sistema
	A desenhar as equações no formato de retas na folha milimetrada e no aplicativo e aprendemos também a resolver os sistemas com o desenho das retas	Com a aula da professora	A dificuldade maior é se a gente for desenhar as retas se for no aplicativo do celular é melhor.
E7 e E11	Aprendemos que a equação é também uma reta e podemos resolver um sistema, transformando as equações em retas. Depois é só ver onde elas se encontram.	Aprendemos pela aula com o aplicativo, pois nessa aula todo resultado do aplicativo era o mesmo do sistema.	Perceber que os resultados do desenho das retas nas folhas e dos sistemas eram os mesmos.
E8 e E12	*Usar o GeoGebra *Representar equações no plano *Resolver sistemas com retas no plano *Corrigir os sistemas pelo celular	A gente ficou desconfiado quando vimos que o resultado do sistema era o mesmo do ponto de interseção das retas, aí fizemos outros para ver se dava certo, e deu.	Não tivemos dificuldades, só ficamos em dúvida se ia dar certo todas as vezes e se também iria dá certo com sistemas maiores.
E14 e E16	Resolver sistema com retas	No celular	Fazer as retas no papel

Fonte: Dados dos autores (2019)

Conforme dito anteriormente, as informações contidas no Quadro 6 corroboram para o entendimento de que os estudantes, em sua maioria, só entenderam a resolução de sistema



lineares 2×2 por meio da representação geométrica, por ocasião da utilização do aplicativo GeoGebra.

5 CONCLUSÃO

A realização da aula inédita proporcionou aos estudantes envolvidos a oportunidade de conhecer e utilizar novos registros para representar e resolver sistemas lineares do tipo 2×2 . Durante o processo de construção desse conhecimento, a realização de cada etapa representou um avanço gradativo dos saberes acerca do objeto estudado e o alcance dos objetivos propostos sinalizou empenho da parte dos envolvidos e boa aceitação da metodologia utilizada.

Contudo, deve-se atentar para o fato de não ter ocorrido na etapa 2, durante a realização da atividade 2, a percepção por parte dos estudantes de que a solução dos problemas representados por meio dos sistemas 2×2 e obtida pelo tratamento algébrico, coincidia com o ponto de intersecção das retas construídas em um mesmo plano e que representavam as equações de um mesmo sistema.

Isso leva a uma reflexão sobre que fatores podem ter influenciado negativamente na construção desse conhecimento no primeiro momento de realização da atividade 2, ou ainda, se foi o uso do software que proporcionou condições de aprendizado mais adequadas a abordagem do tema e a realização da tarefa.

Esses questionamentos indicam que, ao se realizar o trabalho de elaboração de uma aula com suas etapas e tarefas, não se deve considerar que o planejamento está concluído. O replanejamento é necessário, as etapas podem ser aprimoradas e as tarefas modificadas ou adaptadas a fim de que se tornem mais adequadas as especificidades das turmas.

REFERÊNCIAS

BRASIL. **Base Nacional Comum Curricular**. Brasília: MEC, 2018. Disponível em: <http://http://basenacionalcomum.mec.gov.br>. Acesso em: 22 de março de 2020.

DUVAL, R. **Registre de représentation sémiotique et fonctionnement cognitif de la pensée**. Annales de Didactique et Sciences Cognitives. Strasbourg: IREM – ULP, vol. 5, p. 37-65. 1993. Disponível em: <publimath.irem.univ-mrs.fr/biblio/IST93001.htm> Acesso em: 04 nov. 2019.

DUVAL, R. Registros de representação semiótica e funcionamento cognitivo da compreensão em matemática. In: MACHADO, S. D.A. (Org.). **Aprendizagem em matemática: registros de representação semiótica**. Campinas: Papyrus, 2003, p.11-33.



GEOGEBRA, **Geogebra.org**. 2020. Sobre. Disponível em:
<<https://www.geogebra.org/about>> Acesso em: 23 jul. 2020.

MALTEMP, M. V.; MENDES, R. O. Tecnologias digitais na sala de aula: por que não? In: CONGRESSO INTERNACIONAL TIC E EDUCAÇÃO, 4., 2016, Lisboa. **Atas do [...]**. Lisboa: Instituto da Educação da Universidade de Lisboa, 2016. p. 86-96. Disponível em:
<http://ticeduca2016.ie.ulisboa.pt/?page_id=1369> Acesso em: 07 agost. 2020.

MENEGHELLI, J.; POSSAMAI, J.P. Resolução de Problemas e o software GeoGebra: um caminho para a compreensão das funções seno e cosseno. **Revista Educação Matemática Pesquisa**. V. 21. São Paulo, 2019. Disponível em:
<<https://revistas.pucsp.br/emp/article/view/39697/pdf>> Acesso em: 20 abril 2020.

MIORIM, M. A. **O Ensino da Matemática**: evolução e modernização. Tese (Doutorado em Educação) – Faculdade de Educação, Universidade Estadual de Campinas, São Paulo, 1995.

PACHECO, M. B.; ANDREIS, G. S. L. **Causas das dificuldades de aprendizagem em Matemática**: percepção de professores e estudantes do 3º ano do Ensino Médio. *Revista Principia*. João Pessoa, 2018. Disponível em:
<<https://periodicos.ifpb.edu.br/index.php/principia/article/view/1612>> Acesso em: 09 agosto 2020.

PANTOJA, L. F. L.; CAMPOS, N. F. S. C.; SALCEDOS, R. R. C. A teoria dos registros de representações semióticas e o estudo de sistemas de equações algébricas lineares. In: CONGRESSO INTERNACIONAL DE ENSINO DA MATEMÁTICA. 6. 2013. Canoas. **Anais do [...]** Rio Grande do Sul: ULBRA, 2013. Disponível em:
<<http://www.conferencias.ulbra.br/index.php/ciem/vi/paper/viewFile/1423/528>> Aceso em: 20 agosto 2019.

PEIRCE, Charles S. **Semiótica**. Trad. de José Teixeira Coelho Neto. São Paulo: Perspectiva, 2005 (Coleção estudos). Disponível em:
<www.passeidireto.com/arquivo/60607859/semiotica-charles-sanders-peirce> Acesso em: 04 fev. 2020.

SÁNCHEZ, J. N. G. **Dificuldades de aprendizagem e intervenção psicopedagógica**. Porto Alegre, 2004.