



Artigo

# Transformações em Sistemas Elétricos de Potência: Análise das Transformadas de Clarke e Park

Nathan Bezerra Gurgel <sup>[1]</sup>, Adriano Aron Freitas de Moura <sup>[2]</sup>, Ailson Pereira de Moura <sup>[3]</sup>, Ednardo Pereira da Rocha <sup>[4]</sup>, Victor de Paula Brandão Aguiar <sup>[5]</sup>, Olympio Cipriano da Silva Filho <sup>[6]</sup>

<sup>[1]</sup> Universidade Federal Rural do Semi-Árido; nathan.gurgel@ieee.org

<sup>[2]</sup> Universidade Federal Rural do Semi-Árido; adrianoaron@ufersa.edu.br

<sup>[3]</sup> Universidade Federal Rural do Ceará; ailson@ufc.br

<sup>[4]</sup> Universidade Federal Rural do Semi-Árido; ednardo.pereira@ufersa.edu.br

<sup>[5]</sup> Universidade Federal Rural do Semi-Árido; victor@ufersa.edu.br

<sup>[6]</sup> Universidade Federal Rural do Semi-Árido; olympio.cipriano@ufersa.edu.br

Recebido: 29/10/2020;

Aceito: 24/12/2020;

Publicado: 15/02/2021.

**Resumo:** As máquinas elétricas rotativas trifásicas são elementos essenciais para os sistemas elétricos de potência. Devido ao caráter dinâmico desses equipamentos, as análises de seus circuitos elétricos equivalentes se tornam um tanto complexas. Existem diversas formas para facilitar a resolução dos projetos e análises, sendo a transformação de domínio uma das mais comumente usadas e em específico, citamos a transformada de Park e Clarke que foram inicialmente desenvolvidas para simplificar os cálculos. O presente artigo traz uma revisão sistemática dessas transformadas, mostrando as deduções das matrizes de Amplitude Invariante e Potência Invariante, e a aparição da frequência dupla quando a velocidade angular do referencial está na velocidade síncrona, além de mostrar na prática as vantagens de se utilizar essas transformações.

**Palavras-chave:** Transformada de Clarke; Transformada de Park; Sistemas Elétricos de Potência

**Abstract:** The triphasic rotative electric machines are essential elements to the electric power systems. Due to the equipment's dynamic behavior, their equivalent electrical circuits become complex. Exist many ways to ease the projects and analysis resolutions, being the domain transformation one of the most used, and in specific, we cite the Park and Clarke transformation which was initially developed to simplify the calculations. The present article brings a systematic review of these transformations, showing the deductions of Invariant Amplitude and Power Invariant matrix, and the existence of the doubled frequency when the reference angular speed is equal to the synchronous speed, in addition to the visualization of the practical outcomes of the use of these transformations.

**Key-words:** Clarke Transformation, Park Transformation, Electric Power Systems.

## 1. INTRODUÇÃO

OS Geradores Rotativos (GRs) são elementos essenciais para os Sistemas Elétricos de Potência (SEP). Em particular no Brasil, apesar dos avanços na integração de fontes de energia estáticas (sistemas fotovoltaicos e baterias) com a rede [1,2], usinas eólicas, térmicas, hidrelétricas e nucleares representam 96% da geração elétrica de acordo com o Operador Nacional do Sistema Elétrico (ONS) [3], onde o funcionamento dessas usinas dependem de turbinas conectadas à geradores síncronos ou de indução.

Visto sua importância, o projeto e análise de GRs é de suma importância para garantir a continuidade e confiabilidade de suas operações, mas devido ao seu comportamento dinâmico espacial e temporal, dando ênfase a máquinas polifásicas, suas análises se tornam mais complexas. Entre tantas formas para facilitar o trabalho, tem-se a transformada de coordenadas. A primeira apresentação de um método para simplificar a análise de máquinas polifásicas vem de Fortescue [4] o qual apresentou a transformada de eixos polifásicos em suas componentes simétricas. Clarke [5] apresentou uma modificação das Componentes Simétricas (CS) para

remover a necessidade dos números complexos inerentes das componentes simétricas. Park [6] modificou a análise de máquinas síncronas de tal maneira que as variáveis referentes aos enrolamentos do estator estivessem referidas a enrolamentos rotativos fictícios. Stanley [7] mostrou que as indutâncias mútuas de máquinas de indução devido ao movimento do rotor podiam ser eliminadas ao referir os enrolamentos deste a enrolamentos fictícios estáticos. Kron [8] apresentou a transformação das variáveis tanto do estator quanto do rotor para um referencial que girava em sincronia com a velocidade angular dos parâmetros do estator. No fim, os métodos propostos por [5-9] eram nada mais que casos particulares de um caso geral demonstrado por Krause [10], esse caso geral pode ser chamado de Referencial Arbitrário [11].

Apesar de inicialmente ser desenvolvido para análise de máquinas elétricas, o referencial arbitrário, ou sistema de coordenadas  $dq0$ , é utilizado em outras aplicações tais como filtros *shunt* de potência ativa [12], análise de sinais [13], controle de inversores [14], modelagem de componentes de sistemas elétricos [15,16] e análise de SEP [17].

Haja vista a importância desse sistema para a análise de SEP como um todo o presente artigo tem como objetivo uma revisão sistemática das transformadas de Park e Clarke, abordando de maneira clara as nuances das transformações além de trazer exemplos práticos de sua aplicação. O artigo está dividido da forma proposta. Na Seção 2 é apresentada a Transformada de Clarke (TC), mostrando como derivar ela a partir da forma proposta por Clarke [5], além das constantes que definem a invariância de potência e a invariância de amplitude. Na Seção 3 é apresentada a Transformada de Park (TP) de forma semelhante à Transformada de Clarke. Na Seção 4 é apresentada a generalização do Referencial Arbitrário além de suas aplicações. Na Seção 5 é discutido os resultados e propostas para futuros trabalhos.

## 2. TRANSFORMADA DE CLARKE

Em 1938, Edith Clarke apresentou uma modificação das componentes simétricas a fim de remover a parte imaginária presente nas componentes simétricas e facilitar os cálculos. Para apresentar o conceito, inicialmente vamos definir um sistema, convenientemente de 3 fases, dado pela seguinte equação:

$$\lambda_{abc} = \begin{bmatrix} M_a \cos(\omega t + \phi_a) \\ M_b \cos(\omega t + \phi_b) \\ M_c \cos(\omega t + \phi_c) \end{bmatrix} \quad (1)$$

Onde:  $\lambda_{abc}$  é uma variável qualquer definida pelo sistema de coordenadas  $abc$ ;  $M_k$  é a amplitude máxima da coordenada  $k$ ;  $\omega$  é a velocidade angular do sistema, dado em radianos/s; e  $\phi_k$  é a defasagem da coordenada  $k$  em relação a origem, dado em radianos.

Quando é dito que um sistema trifásico é equilibrado significa que as amplitudes de todas as coordenadas do sistema são iguais e eles possuem uma defasagem de  $120^\circ$  ou  $2\pi/3$  entre si. Matematicamente:

$$\lambda_{abc} = M \begin{bmatrix} \cos(\omega t + \phi) \\ \cos(\omega t + \phi - 2\pi/3) \\ \cos(\omega t + \phi + 2\pi/3) \end{bmatrix} \quad (2)$$

A TC inicialmente foi desenvolvida por uma modificação da transformada de Fortescue. A apresentação detalhada de Fortescue está além do escopo deste artigo, caso tenha interesse, recomenda-se olhar [4]. Denotando o sistema de CS como  $\lambda_{012}$ , é possível relacionar este com o sistema da Equação 1 pela Equação 3 onde  $\alpha = e^{\frac{j2\pi}{3}} = \cos(2\pi/3) + j \sin(2\pi/3)$ . Fazendo a inversão da Equação 3, obtém os valores do sistema de coordenadas das CS como mostra a Equação 4.

$$\lambda_{abc} = T_{abc-012} \lambda_{012} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & \alpha^2 & \alpha \\ 1 & \alpha & \alpha^2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \lambda_0 \\ \lambda_1 \\ \lambda_2 \end{bmatrix} \quad (3)$$

$$\lambda_{012} = [T_{abc-012}]^{-1} \lambda_{abc} = \frac{1}{3} \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & \alpha & \alpha^2 \\ 1 & \alpha^2 & \alpha \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \lambda_a \\ \lambda_b \\ \lambda_c \end{bmatrix} \quad (4)$$

Uma vez sabendo os valores das CS, encontramos a TC pela Equação 5. Podemos perceber pela Equação 5 que a coordenada  $\alpha$  é a soma das componentes positiva e negativa, a coordenada  $\beta$  é a diferença das componentes positiva e negativa defasada 90 graus, e a componente zero permanece a mesma.

$$\lambda_{\alpha\beta 0} = T_{012-0\alpha\beta} \lambda_{\pm 0} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & -j & j \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \lambda_0 \\ \lambda_1 \\ \lambda_2 \end{bmatrix} \quad (5)$$

Um caso importante para ilustrar é quando faz a transformação de um sistema trifásico equilibrado. Usando a Equação 2 com  $\phi = 0$ , obtém o resultado da Equação 6, para melhor compreensão do evento a Figura 1 mostra o paralelo entre um sistema  $abc$  e  $0\alpha\beta$ , ambos equilibrados em fase e amplitude. Na Figura 1a visualizamos o caso convencional do sistema trifásico equilibrado, na Figura 2a é possível visualizar duas fases defasadas de noventa graus entre si. Para simplificar futuros exemplos, denotamos a transformação dos eixos  $abc$  em  $0\alpha\beta$  pela Equação 7. Caso deseje visualizar seu desenvolvimento, refira-se ao Apêndice A.

$$\lambda_{0\alpha\beta} = T_K \lambda_{abc} = V \begin{bmatrix} 0 \\ \cos(\omega t) \\ \sin(\omega t) \end{bmatrix} \quad (6)$$

$$T_K = T_{C-K} T_{abc-CS} = \frac{1}{3} \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & -1 & -1 \\ 0 & \sqrt{3} & -\sqrt{3} \end{bmatrix} \quad (7)$$

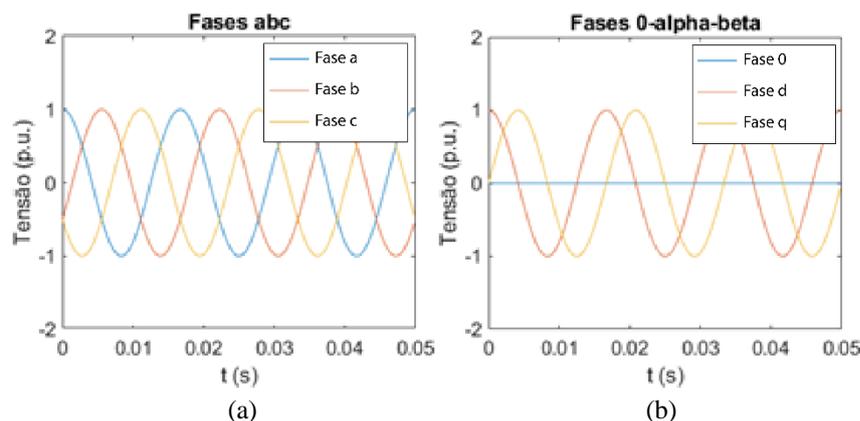


FIGURA 1. Sistema trifásico equilibrado em fase e amplitude apresentado no sistema (a)  $abc$  (b)  $0\alpha\beta$ .

Uma vez que estejamos utilizando a TC para sistemas elétricos, desejamos entender o que os eixos  $0\alpha\beta$  estão nos informando em termos práticos, para tanto utiliza-se uma modificação da matriz de tal forma que o valor de um parâmetro que se deseja entender em um sistema equilibrado seja exatamente igual tanto nos eixos  $\alpha\beta$  quando em  $abc$  (o 0 é desconsiderado, pois em um sistema equilibrado, o valor no eixo 0 é nulo para qualquer instante de tempo). As modificações usuais aplicadas a TC nos levam a duas formas conhecidas como Amplitude Invariante (AI) e Potência Invariante (PI), os quais são as Equações 8 e 9, respectivamente. Caso deseje ver a resolução, refira-se ao Apêndice B.

$$T_{K-AI} = \frac{1}{3} \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & -1 & -1 \\ 0 & \sqrt{3} & -\sqrt{3} \end{bmatrix} \quad (8)$$

$$T_{K-PI} = \frac{1}{\sqrt{6}} \begin{bmatrix} \sqrt{2} & \sqrt{2} & \sqrt{2} \\ 2 & -1 & -1 \\ 0 & \sqrt{3} & -\sqrt{3} \end{bmatrix} \quad (9)$$

### 3. TRANSFORMADA DE PARK

Em 1929, Robert H. Park apresentou uma modificação da análise de máquinas elétricas na qual as tensões, correntes e fluxos magnéticos estão referidos a um sistema que está girando na mesma velocidade da máquina síncrona [6]. O autor denomina esse sistema de  $dq0$ , onde  $d$  é o eixo direto da máquina síncrona e  $q$  é o eixo em quadratura, a coordenada 0 é a mesma dos sistemas  $\alpha\beta0$  e 012.

Matematicamente definindo a TP:

$$\lambda_{dq0} = \mathbf{T}_p \lambda_{abc} = \frac{2}{3} \begin{bmatrix} \cos(\theta) & \cos\left(\theta - \frac{2\pi}{3}\right) & \cos\left(\theta + \frac{2\pi}{3}\right) \\ \sin(\theta) & \sin\left(\theta - \frac{2\pi}{3}\right) & \sin\left(\theta + \frac{2\pi}{3}\right) \\ 1/2 & 1/2 & 1/2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \lambda_a \\ \lambda_b \\ \lambda_c \end{bmatrix} \quad (10)$$

Onde  $\theta$  é a posição instantânea dos eixos, além disso  $d\theta = \omega dt$ .  $\lambda_k$  é uma variável (geralmente tensão  $e$ , corrente  $i$  ou fluxo magnético  $\psi$ ) relacionada à coordenada  $k$ .

Para futuras análises, definamos também a inversa da TP sendo:

$$\mathbf{T}_p^{-1} = \begin{bmatrix} \cos(\theta) & -\sin(\theta) & 1 \\ \cos\left(\theta - \frac{2\pi}{3}\right) & -\sin\left(\theta - \frac{2\pi}{3}\right) & 1 \\ \cos\left(\theta + \frac{2\pi}{3}\right) & -\sin\left(\theta + \frac{2\pi}{3}\right) & 1 \end{bmatrix} \quad (11)$$

Assim como a TC, a TP possui as matrizes de PI e AI, visualizadas pelas Equações 12 e 13, respectivamente. Por métodos quase iguais aos apresentados no Apêndice B é possível encontrar os valores das constantes e por isso suas deduções não serão apresentadas nesse artigo.

$$\mathbf{T}_p = \frac{2}{3} \begin{bmatrix} \cos(\theta) & \cos\left(\theta - \frac{2\pi}{3}\right) & \cos\left(\theta + \frac{2\pi}{3}\right) \\ \sin(\theta) & \sin\left(\theta - \frac{2\pi}{3}\right) & \sin\left(\theta + \frac{2\pi}{3}\right) \\ 1/2 & 1/2 & 1/2 \end{bmatrix} \quad (12)$$

$$\mathbf{T}_p = \sqrt{\frac{2}{3}} \begin{bmatrix} \cos(\theta) & \cos\left(\theta - \frac{2\pi}{3}\right) & \cos\left(\theta + \frac{2\pi}{3}\right) \\ \sin(\theta) & \sin\left(\theta - \frac{2\pi}{3}\right) & \sin\left(\theta + \frac{2\pi}{3}\right) \\ 1/\sqrt{2} & 1/\sqrt{2} & 1/\sqrt{2} \end{bmatrix} \quad (13)$$

Um detalhe interessante a se observar é a semelhança entre as TC e TP. Definindo o instante  $\theta(0) = 0$  na Equação 10 e evidenciando a matriz de transformação obtemos a Equação 14, que é justamente a TC. A conclusão é que a TC é a TP estacionária para  $\theta = 0$ , ou inversamente, a TP é a TC girando a uma velocidade  $\omega$ .

$$\mathbf{T}_p = \frac{1}{3} \begin{bmatrix} 2 & -1 & -1 \\ 0 & -\sqrt{3} & \sqrt{3} \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix} \quad (14)$$

Utilizando a TP em sistemas elétricos trifásicos observamos dois eventos. Para o primeiro evento, consideremos um sistema trifásico equilibrado como apresentado na Equação 2, aplicando a Equação 2 na Equação 10, obtemos a Equação 15. Nisso vemos o principal benefício da TP, em um caso de sistema equilibrado necessitamos trabalhar somente com uma fase. Caso deseje visualizar a dedução, refira-se ao Apêndice C.

$$\lambda_{dq0} = \begin{bmatrix} M \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \quad (15)$$

Para o segundo caso, considere o sistema trifásico na Equação 1 com  $\phi_a$  sendo a referência. Usando esse sistema na Equação 10 obtemos as Equações 16.1-16.3. Após algumas manipulações apresentadas no Apêndice C, é evidenciado que um sistema  $dq0$  desequilibrado apresenta um comportamento senoidal em todas as suas

fases, e além disso, as fases  $d$  e  $q$  apresentam uma componente constante e a frequência em seus termos senoidais são o dobro da frequência do sistema  $abc$  como mostra a Figura 2.

$$\lambda_d = \frac{2}{3} \left[ M_a \cos(\theta) \cos(\omega t) + M_b \cos\left(\theta - \frac{2\pi}{3}\right) \cos\left(\omega t - \frac{2\pi}{3}\right) + M_c \cos\left(\theta + \frac{2\pi}{3}\right) \cos\left(\omega t + \frac{2\pi}{3}\right) \right] \quad (16.1)$$

$$\lambda_q = \frac{2}{3} \left[ M_a \sin(\theta) \cos(\omega t) + M_b \sin\left(\theta - \frac{2\pi}{3}\right) \cos\left(\omega t - \frac{2\pi}{3}\right) + M_c \sin\left(\theta + \frac{2\pi}{3}\right) \cos\left(\omega t + \frac{2\pi}{3}\right) \right] \quad (16.2)$$

$$\lambda_0 = \frac{M}{3} \left[ M_a \cos(\omega t) + M_b \cos\left(\omega t - \frac{2\pi}{3}\right) + M_c \cos\left(\omega t + \frac{2\pi}{3}\right) \right] \quad (16.3)$$

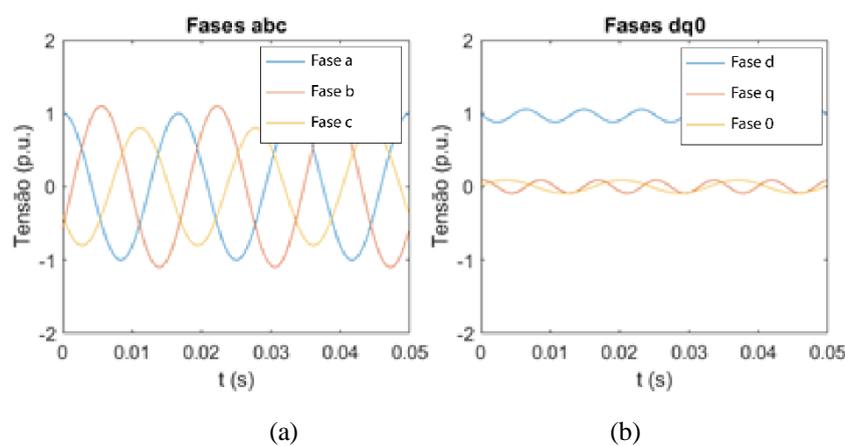


FIGURA 2. Visualização do sistema trifásico com amplitudes desequilibradas e fases equilibradas no sistema (a)  $abc$  (b)  $dq0$ .

#### 4. GENERALIZAÇÃO E APLICAÇÕES

A TP e TC são casos particulares do chamado Transformada de Referencial Arbitrário (TRA) [11]. Ainda de acordo com Krause, os eixos girantes do sistema  $dq0$  podem girar a qualquer velocidade, porém somente 3 casos são funcionais, estas estão descritas na Tabela 1. A partir de agora as transformações  $dq0$  vão ser referidas apenas por  $T_{RA}$ , independente da velocidade do referencial.

TABELA 1. Principais referenciais de velocidade e sua descrição [11].

Velocidade	Interpretação
0	Sistema estacionário (Clarke)
$\omega_r$	Variáveis referidas à velocidade fixada no rotor
$\omega_s$	Variáveis referidas à velocidade síncrona da máquina (Park)

Assim como a TRA é aplicada para valores primordiais de máquinas elétricas, também é possível aplicar a mesma em elementos passivos como indutores, capacitores e resistências. As transformações de  $abc$  para  $dq0$  são dadas pela Equação 17 onde  $\Lambda$  pode ser a matriz de indutância, capacitância ou resistência de um sistema trifásico. Dois casos particulares da TRA é quando a matriz  $\Lambda$  é: diagonal; simétrica. Os resultados dos dois casos são apresentados nas Equações 18 e 19. A Equação 19 ilustra a principal vantagem da TRA, um sistema que antes estava acoplado entre suas fases agora pode ser descrito de maneira separada, facilitando seus cálculos. Além disso, como a transformação de  $\lambda_{abc}$  para  $\lambda_{dq0}$  resulta na Equação 15 para casos equilibrados, um sistema que antes era matricial agora depende unicamente de uma equação.

$$\Lambda_{dq0} = T_{RA} \Lambda_{abc} (T_{RA})^{-1} \quad (17)$$

$$\Lambda_{dq0} = T_{RA} \begin{bmatrix} \Lambda & 0 & 0 \\ 0 & \Lambda & 0 \\ 0 & 0 & \Lambda \end{bmatrix} (T_{RA})^{-1} = \Lambda_{abc} \quad (18)$$

$$\Lambda_{dq0} = T_{RA} \begin{bmatrix} \Lambda & k & k \\ k & \Lambda & k \\ k & k & \Lambda \end{bmatrix} (T_{RA})^{-1} = \begin{bmatrix} \Lambda - k & 0 & 0 \\ 0 & \Lambda - k & 0 \\ 0 & 0 & \Lambda + 2k \end{bmatrix} \quad (19)$$

Para visualizar os efeitos da TRA, considere o sistema apresentado na Figura 3, com os parâmetros apresentados no Quadro 1, em regime permanente, visualmente o sistema se mostra estável nas Figuras 4a-4c, onde temos a tensão nos eixos  $abc$  e  $dq0$  e a corrente nos eixos  $abc$ . Porém, é visível a presença de um transitório na Figura 4d. Há que se atentar que o valor do eixo 0 é estável, indicando que o transitório ocorre de maneira homogênea nas três fases.

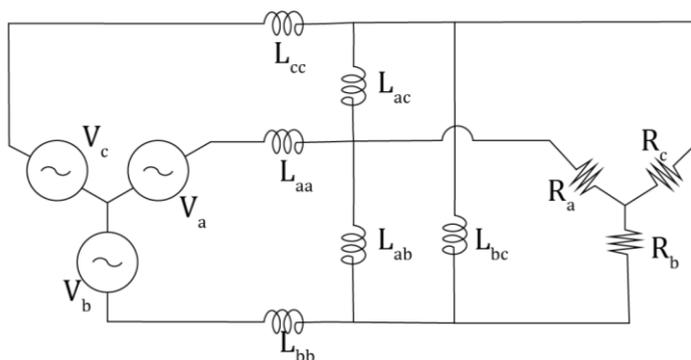


FIGURA 3. Exemplo de sistema elétrico trifásico.

QUADRO 1. Valores do sistema elétrica da Figura 3.

$V_a$	$220e^{j0}$	$L_{aa}$	$2 \text{ mH}$
$V_b$	$220e^{-j120^\circ}$	$L_{bb}$	$2 \text{ mH}$
$V_c$	$220e^{j120^\circ}$	$L_{cc}$	$2 \text{ mH}$
$R_a$	$1000 \Omega$	$L_{ab}$	$1 \text{ mH}$
$R_b$	$1000 \Omega$	$L_{ac}$	$1 \text{ mH}$
$R_c$	$1000 \Omega$	$L_{bc}$	$1 \text{ mH}$

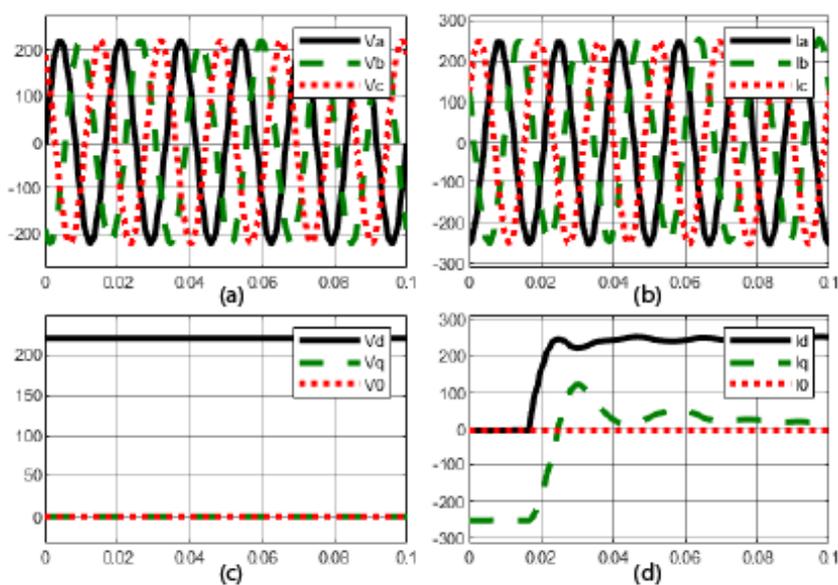


FIGURA 4. Resultado do sistema da Figura 3. (a) Tensão  $abc$ . (b) Corrente  $abc$ . (c) Tensão  $dq0$ . (d) Corrente  $dq0$ .

Para a visualização de uma falta, a TRA também se torna mais prática. Na Figura 5 há os resultados das correntes e tensões em  $abc$  e  $dq0$  do sistema da Figura 3 quando ocorre uma falta bifásica entre as fases  $a$  e  $b$  em  $t = 0.1s$ . Na Figura 5b temos a modificação gradual da corrente para as fases  $abc$  enquanto na Figura 4d, a visualização do transitório da falta é mais visível alcançando um pico de  $300A$  e estabilização próximo aos  $250A$  no eixo  $d$ . Um ponto a salientar é a frequência dupla em  $dq0$ .

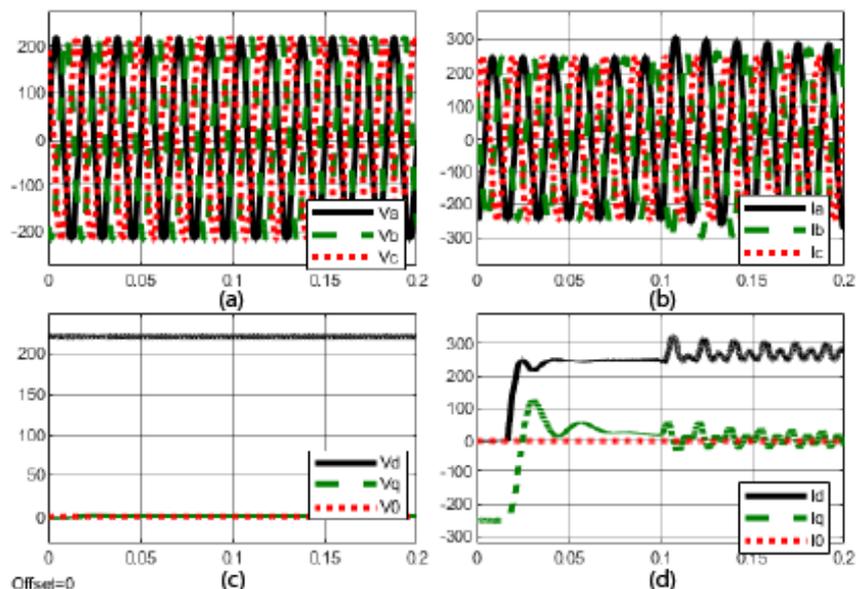


FIGURA 5. Resultado do sistema da Figura 3 para uma falta bifásica. (a) Tensão  $abc$ . (b) Corrente  $abc$ . (c) Tensão  $dq0$ . (d) Corrente  $dq0$ .

## 5. CONCLUSÃO

O artigo apresentou as transformadas de Clarke e Park, mostrando toda a fundamentação teórica e suas aplicações em sistemas elétricos. Foi visto o efeito de sistemas desequilibrados em fase e ângulo para os referidos sistemas, além da dedução para a Potência Invariante e Amplitude Invariante, além da visualização prática de toda a teoria em simulação.

Esse artigo serve para que estudantes visualizem de maneira clara as vantagens das TRAs, permitindo que aplique em diferentes casos práticos como os apresentados em [5-17]. Futuros trabalhos a serem feitos utilizando o resultados deste trabalho são: utilização das componentes CC apresentadas na dedução da Transformada de Clarke desequilibrada em fase e ângulo para identificação de faltas; Dedução dos efeitos de elementos em passivos no sistema geométrico  $abc \leftrightarrow dq0$  apresentado por O'Rourke [18].

#### APÊNDICE A – DEDUÇÃO DAS EQUAÇÕES DE CLARKE

Usando um sistema de tensões trifásico equilibrado na Transformada de Fortescue obtemos:

$$\begin{aligned} \mathbf{V}_{012} &= \frac{1}{3} \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & \alpha & \alpha^2 \\ 1 & \alpha^2 & \alpha \end{bmatrix} \begin{bmatrix} V \cos(\omega t) \\ V \cos(\omega t - 2\pi/3) \\ V \cos(\omega t + 2\pi/3) \end{bmatrix} \\ &= \frac{V}{2} \begin{bmatrix} 0 \\ \cos(\omega t) + j \operatorname{sen}(\omega t) \\ \cos(\omega t) - j \operatorname{sen}(\omega t) \end{bmatrix} \end{aligned} \quad (\text{A1})$$

Usando a Transformação da Equação 5, obtemos:

$$\begin{aligned} \mathbf{V}_{0\alpha\beta} &= \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & -j & j \end{bmatrix} V \begin{bmatrix} 0 \\ \cos(\omega t) + j \operatorname{sen}(\omega t) \\ \cos(\omega t) - j \operatorname{sen}(\omega t) \end{bmatrix} \\ &= V \begin{bmatrix} 0 \\ \cos(\omega t) \\ \operatorname{sen}(\omega t) \end{bmatrix} \end{aligned} \quad (\text{A2})$$

Para facilitar, a TC é dada por:

$$\mathbf{T}_K = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & -j & j \end{bmatrix} \frac{1}{3} \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & \alpha & \alpha^2 \\ 1 & \alpha^2 & \alpha \end{bmatrix} = \frac{1}{3} \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & \alpha + \alpha^2 & \alpha^2 + \alpha \\ 0 & -j(\alpha - \alpha^2) & +j(\alpha^2 - \alpha) \end{bmatrix} = \frac{1}{3} \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & -1 & -1 \\ 0 & \sqrt{3} & -\sqrt{3} \end{bmatrix} \quad (\text{A3})$$

#### APÊNDICE B – DEDUÇÃO DA AMPLITUDE INVARIANTE E POTÊNCIA INVARIANTE DE CLARKE

Em cada instante de tempo, as tensões em  $\alpha\beta$  possuem um valor definido por suas equações. O que desejamos é definir uma forma que essas tensões estejam referidas às tensões de  $V_{abc}$ . Pela Equação B1.1-1.3 vemos a relação entre  $0\alpha\beta$  e  $abc$ .

$$v_0 = \frac{K}{3}(v_a + v_b + v_c) \quad (\text{B1.1})$$

$$v_\alpha = \frac{K}{3}(2v_a - v_b - v_c) \quad (\text{B1.2})$$

$$v_\beta = \frac{K}{3}(\sqrt{3}v_b - \sqrt{3}v_c) \quad (\text{B1.3})$$

O objetivo é então encontrar uma constante  $K$  que torne o valor máximo dos eixos  $\alpha$  e  $\beta$  iguais ao valor máximo dos eixos  $abc$ . Supondo um sistema de tensão trifásico equilibrado, podemos escrever a Equação B2 como:

$$V_\alpha = v_a \cos(\omega t) = \frac{K}{3} \left[ 2V \cos(\omega t) + V \cos\left(\omega t - \frac{2\pi}{3}\right) + V \cos\left(\omega t + \frac{2\pi}{3}\right) \right] \quad (\text{B2})$$

No instante  $t = 0$ , obtemos:

$$\begin{aligned} v_a &= \frac{VK}{3} \left[ 2 + \frac{1}{2} + \frac{1}{2} \right] \\ v_a &= VK \end{aligned} \quad (\text{B3})$$

Assim vemos que para manter a magnitude da tensão constante,  $K$  deve ser igual a 1. Usualmente, é encontrado na literatura a matriz da TC igual à Equação B4, porém é somente uma manipulação desnecessária.

$$\mathbf{T}_{K-AI} = \frac{2}{3} \begin{bmatrix} 1/2 & 1/2 & 1/2 \\ 1 & -1/2 & -1/2 \\ 0 & \sqrt{3}/2 & -\sqrt{3}/2 \end{bmatrix} \quad (\text{B4})$$

Para definir a Potência Invariante, deve encontrar uma constante tal que mantenha o valor das potências em  $abc$  e  $\alpha\beta 0$  iguais, em outras palavras:

$$\mathbf{P}_{abc} = \mathbf{P}_{0\alpha\beta} \quad (\text{B5})$$

Sabemos que a potência de um sistema trifásico é dada em sua forma matricial por:

$$\mathbf{P}_{abc} = [\mathbf{V}_{abc}]^T \mathbf{I}_{abc} = [v_a \quad v_b \quad v_c] \begin{bmatrix} i_a \\ i_b \\ i_c \end{bmatrix} \quad (\text{B6})$$

Também sabemos que:

$$\lambda_{abc} = [\mathbf{T}_K]^{-1} \begin{bmatrix} \lambda_0 \\ \lambda_\alpha \\ \lambda_\beta \end{bmatrix} = \frac{1}{2} \begin{bmatrix} 2 & 2 & 0 \\ 2 & -1 & \sqrt{3} \\ 2 & -1 & -\sqrt{3} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \lambda_0 \\ \lambda_\alpha \\ \lambda_\beta \end{bmatrix} \quad (\text{B7})$$

Usando a Equação B6 em B5 e usando a igualdade de B4, encontramos:

$$\begin{aligned} [v_a \quad v_b \quad v_c] \begin{bmatrix} i_a \\ i_b \\ i_c \end{bmatrix} &= \left( [\mathbf{T}_K]^{-1} \begin{bmatrix} v_0 \\ v_\alpha \\ v_\beta \end{bmatrix} \right)^T [\mathbf{T}_K]^{-1} \begin{bmatrix} i_0 \\ i_\alpha \\ i_\beta \end{bmatrix} \\ &= \left( \frac{1}{2} \begin{bmatrix} 2 & 2 & 0 \\ 2 & -1 & \sqrt{3} \\ 2 & -1 & -\sqrt{3} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} v_0 \\ v_\alpha \\ v_\beta \end{bmatrix} \right)^T \frac{1}{2} \begin{bmatrix} 2 & 2 & 0 \\ 2 & -1 & \sqrt{3} \\ 2 & -1 & -\sqrt{3} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} i_0 \\ i_\alpha \\ i_\beta \end{bmatrix} \\ &= \frac{1}{4} \begin{bmatrix} 2v_0 + 2v_\alpha \\ 2v_0 - v_\alpha + \sqrt{3}v_\beta \\ 2v_0 - v_\alpha - \sqrt{3}v_\beta \end{bmatrix}^T \begin{bmatrix} 2i_0 + 2i_\alpha \\ 2i_0 - i_\alpha + \sqrt{3}i_\beta \\ 2i_0 - i_\alpha - \sqrt{3}i_\beta \end{bmatrix} \end{aligned} \quad (\text{B8})$$

Depois de algumas manipulações algébricas em B8, encontramos:

$$\begin{bmatrix} v_a \\ v_b \\ v_c \end{bmatrix}^T \begin{bmatrix} i_a \\ i_b \\ i_c \end{bmatrix} = \frac{3}{2} \begin{bmatrix} \sqrt{2}v_0 \\ v_\alpha \\ v_\beta \end{bmatrix}^T \begin{bmatrix} \sqrt{2}i_0 \\ i_\alpha \\ i_\beta \end{bmatrix} = \sqrt{\frac{3}{2}} \begin{bmatrix} \sqrt{2}v_0 \\ v_\alpha \\ v_\beta \end{bmatrix}^T \sqrt{\frac{3}{2}} \begin{bmatrix} \sqrt{2}i_0 \\ i_\alpha \\ i_\beta \end{bmatrix} \quad (\text{B9})$$

O objetivo agora é encontrar uma TC tal que  $\mathbf{V}_{abc} = [\mathbf{T}_k]^{-1} \mathbf{V}_{0\alpha\beta}$ . Analisando a Equação B9 temos que: As componentes  $abc$  são  $\sqrt{3}/\sqrt{2}$  maiores que as componentes  $0\alpha\beta$ ; A coordenada zero está multiplicada por  $\sqrt{2}$ . Para integrar essa modificação, a TC deve ser:

$$\lambda_{0\alpha\beta} = \mathbf{T}_{K-PI} \lambda_{abc} = \sqrt{\frac{3}{2}} \frac{1}{2} \begin{bmatrix} \sqrt{2} & \sqrt{2} & \sqrt{2} \\ 2 & -1 & -1 \\ 0 & \sqrt{3} & -\sqrt{3} \end{bmatrix} \lambda_{abc} = \frac{1}{\sqrt{6}} \begin{bmatrix} \sqrt{2} & \sqrt{2} & \sqrt{2} \\ 2 & -1 & -1 \\ 0 & \sqrt{3} & -\sqrt{3} \end{bmatrix} \quad (\text{B9})$$

#### APÊNDICE C – RESULTADO DA APLICAÇÃO DA TRANSFORMADA DE PARK EM SISTEMAS TRIFÁSICOS

Usando a Equação 10 em 2 obtemos as relações apresentadas nas Equações C1.1-1.3. Supondo que  $\theta$  é igual à  $\omega t$  para qualquer instante de tempo então podemos reescrever as Equações C1.1-1.3 em C2.1-2.3.

$$\lambda_d = \frac{2M}{3} \left[ \cos(\theta) \cos(\omega t) + \cos\left(\theta - \frac{2\pi}{3}\right) \cos\left(\omega t - \frac{2\pi}{3}\right) + \cos\left(\theta + \frac{2\pi}{3}\right) \cos\left(\omega t + \frac{2\pi}{3}\right) \right] \quad (\text{C1.1})$$

$$\lambda_q = \frac{2M}{3} \left[ \sin(\theta) \cos(\omega t) + \sin\left(\theta - \frac{2\pi}{3}\right) \cos\left(\omega t - \frac{2\pi}{3}\right) + \sin\left(\theta + \frac{2\pi}{3}\right) \cos\left(\omega t + \frac{2\pi}{3}\right) \right] \quad (\text{C1.2})$$

$$\lambda_0 = \frac{M}{3} \left[ \cos(\omega t) + \cos\left(\omega t - \frac{2\pi}{3}\right) + \cos\left(\omega t + \frac{2\pi}{3}\right) \right] \quad (\text{C1.3})$$

$$\lambda_d = \frac{2M}{3} \left[ \cos^2(\omega t) + \cos^2\left(\omega t - \frac{2\pi}{3}\right) + \cos^2\left(\omega t + \frac{2\pi}{3}\right) \right] \quad (\text{C2.1})$$

$$\begin{aligned} \lambda_q &= \frac{2M}{3} \left[ \sin(\omega t) \cos(\omega t) + \sin\left(\omega t - \frac{2\pi}{3}\right) \cos\left(\omega t - \frac{2\pi}{3}\right) \right. \\ &\quad \left. + \sin\left(\omega t + \frac{2\pi}{3}\right) \cos\left(\omega t + \frac{2\pi}{3}\right) \right] \end{aligned} \quad (\text{C2.2})$$

$$\lambda_0 = \frac{M}{3} \left[ \cos(\omega t) + \cos\left(\omega t - \frac{2\pi}{3}\right) + \cos\left(\omega t + \frac{2\pi}{3}\right) \right] \quad (C2.3)$$

Lembrando das relações trigonométricas:

$$\cos^2(a) = \frac{1 + \cos(2a)}{2}$$

$$\text{sen}(a) \cos(a) = \frac{\text{sen}(2a)}{2}$$

$$\text{sen}^2(a) = \frac{1 - \cos(2a)}{2}$$

Assim, reescrevemos as Equações C2.1-2.2 em C3.1-3.2. Além disso, como o sistema é equilibrado o resultado de C2.3 é nulo para qualquer instante, assim:

$$\lambda_d = \frac{M}{3} \left[ 1 + \cos(2\omega t) + 1 + \cos\left(2\omega t - \frac{4\pi}{3}\right) + 1 + \cos\left(2\omega t + \frac{4\pi}{3}\right) \right] \quad (C3.1)$$

$$\lambda_q = \frac{M}{3} \left[ \text{sen}(2\omega t) + \text{sen}\left(2\omega t - \frac{4\pi}{3}\right) + \text{sen}\left(2\omega t + \frac{4\pi}{3}\right) \right] \quad (C3.2)$$

$$\lambda_0 = 0 \quad (C3.3)$$

Como o sistema é equilibrado a soma dos senos e cossenos é nulo o que nos leva ao sistema descrito na Equação C4.

$$\lambda_{dq0} = \begin{bmatrix} M \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \quad (C4)$$

Para o caso de sistemas trifásicos não equilibrados em fase e amplitude, utiliza a Equação 1 em 10 utilizando a fase  $a$  como referência. O resultado é o sistema de Equações apresentados em C5.1-5.3. Inicialmente é necessário isolar.

$$\lambda_d = \frac{2}{3} \left[ \cos(\omega t) M_a \cos(\omega t) + \cos\left(\omega t - \frac{2\pi}{3}\right) M_b \cos(\omega t + \phi_b) + \cos\left(\omega t + \frac{2\pi}{3}\right) M_c \cos(\omega t + \phi_c) \right] \quad (C5.1)$$

$$\lambda_q = \frac{2}{3} \left[ \text{sen}(\omega t) M_a \cos(\omega t) + \text{sen}\left(\omega t - \frac{2\pi}{3}\right) M_b \cos(\omega t + \phi_b) + \text{sen}\left(\omega t + \frac{2\pi}{3}\right) M_c \cos(\omega t + \phi_c) \right] \quad (C5.2)$$

$$\lambda_0 = \frac{1}{3} [M_a \cos(\omega t) + M_b \cos(\omega t + \phi_b) + M_c \cos(\omega t + \phi_c)] \quad (C5.3)$$

Analisando inicialmente  $\lambda_d$ , podemos dividi-lo em três termos da seguinte maneira:

$$\lambda_d = \frac{2}{3} [t_{d1} + t_{d2} + t_{d3}]$$

Onde:

$$t_{d1} = M_a \cos^2(\omega t)$$

$$\begin{aligned} t_{d2} &= M_b \cos\left(\omega t - \frac{2\pi}{3}\right) \cos(\omega t + \phi_b) \\ &= M_b \left[ -\frac{1}{2} \cos(\omega t) + \frac{\sqrt{3}}{2} \text{sen}(\omega t) \right] [K_{bc} \cos(\omega t) - K_{bs} \text{sen}(\omega t)] \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
t_{d3} &= M_c \cos\left(\omega t + \frac{2\pi}{3}\right) \cos(\omega t + \phi_c) \\
&= M_c \left[ -\frac{1}{2} \cos(\omega t) - \frac{\sqrt{3}}{2} \sin(\omega t) \right] [K_{cc} \cos(\omega t) - K_{cs} \sin(\omega t)]
\end{aligned}$$

Onde  $K_{bc}$ ,  $K_{bs}$ ,  $K_{cc}$ ,  $K_{cs}$  são constantes referentes aos cossenos e senos dos ângulos  $\phi_b$  e  $\phi_c$ , respectivamente. Após uma manipulação em  $t_{d1}$ ,  $t_{d2}$  e  $t_{d3}$ , encontra:

$$\begin{aligned}
t_{d1} &= \frac{M_a}{2} [1 + \cos(2\omega t)] \\
t_{d2} &= \frac{M_b}{4} [-K_{bc} - \sqrt{3}K_{bs} + \cos(2\omega t)(\sqrt{3}K_{bs} - K_{bc}) - \sin(2\omega t)(K_{bs} + \sqrt{3}K_{bc})] \\
t_{d3} &= \frac{M_c}{4} [-K_{cc} + \sqrt{3}K_{cs} - \cos(2\omega t)(K_{cc} + \sqrt{3}K_{cs}) + \sin(2\omega t)(K_{cs} - \sqrt{3}K_{cc})]
\end{aligned}$$

A mesma análise é feita para  $\lambda_q$  resultando em:

$$\begin{aligned}
t_{q1} &= \frac{M_a}{2} \sin(2\omega t) \\
t_{q2} &= \frac{M_b}{4} [K_{bs} - \sqrt{3}K_{bc} - \cos(2\omega t)(K_{bs} + \sqrt{3}K_{bc}) + \sin(2\omega t)(\sqrt{3}K_{bs} - K_{bc})] \\
t_{q3} &= \frac{M_c}{4} [K_{cs} + \sqrt{3}K_{cc} + \cos(2\omega t)(\sqrt{3}K_{cc} - K_{cs}) - \sin(2\omega t)(\sqrt{3}K_{cs} + K_{cc})]
\end{aligned}$$

Com os termos  $t_{dx}, t_{qx} | x = \{1,2,3\}$  definidos, agora vejamos o que ocorre em casos de equilíbrio de fase, ou seja  $\phi_b = -2\pi/3$  e  $\phi_c = 2\pi/3$ , o que nos leva a:

$$K_{bc} = K_{cc} = -\frac{1}{2}; -K_{bs} = K_{cs} = \frac{\sqrt{3}}{2}$$

Usando esses valores, os termos  $t_{dx}, t_{qx} | x = \{1,2,3\}$  se tornam:

$$\begin{aligned}
t_{d1} &= \frac{M_a}{2} [1 + \cos(2\omega t)] \\
t_{d2} &= \frac{M_b}{4} [2 - \cos(2\omega t) - \sqrt{3} \sin(2\omega t)] \\
t_{d3} &= \frac{M_c}{4} [2 - \cos(2\omega t) + \sqrt{3} \sin(2\omega t)]
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
t_{q1} &= \frac{M_a}{2} \sin(2\omega t) \\
t_{q2} &= \frac{M_b}{4} [\sqrt{3} \cos(2\omega t) - \sin(2\omega t)] \\
t_{q3} &= \frac{M_c}{4} [-\sqrt{3} \cos(2\omega t) - \sin(2\omega t)]
\end{aligned}$$

Assim um sistema  $dq0$  desequilibrado somente em amplitude é dado pela Equação C6. Para verificar a veracidade do resultado, basta fazer  $M_a = M_b = M_c$ , o que leva à Equação C4.

$$\lambda_{dq0} = \frac{2}{3} \begin{bmatrix} \frac{M_a + M_b + M_c}{2} + \cos(2\omega t) \left( \frac{2M_a - M_b - M_c}{4} \right) + \sin(2\omega t) \left( \frac{\sqrt{3}M_c - \sqrt{3}M_b}{4} \right) \\ \sin(2\omega t) \left( \frac{2M_a - M_b - M_c}{4} \right) + \cos(2\omega t) \left( \frac{\sqrt{3}M_b - \sqrt{3}M_c}{4} \right) \\ \frac{M_a}{2} \cos(\omega t) + \frac{M_b}{2} \cos\left(\omega t - \frac{2\pi}{3}\right) + \frac{M_c}{2} \cos\left(\omega t + \frac{2\pi}{3}\right) \end{bmatrix} \quad (C6)$$

## REFERÊNCIAS

- [1] ABSolar. Infográfico Absolar. Disponível online: <http://www.absolar.org.br/infografico-absolar.html>. Acesso em: 10/10/2020
- [2] EPE. Anuário Estatístico de Energia Elétrica 2020. Disponível online: [https://www.epe.gov.br/sites-pt/publicacoes-dados-abertos/publicacoes/PublicacoesArquivos/publicacao-160/topico-168/Anu%C3%A1rio\\_2020\\_sp.pdf](https://www.epe.gov.br/sites-pt/publicacoes-dados-abertos/publicacoes/PublicacoesArquivos/publicacao-160/topico-168/Anu%C3%A1rio_2020_sp.pdf). Acesso em: 10/10/2020
- [3] ONS. Capacidade instalada no SIN – 2020/2024. Disponível online: <http://www.ons.org.br/paginas/sobre-o-sin/o-sistema-em-numeros>. Acesso em: 10/10/2020
- [4] Fortescue, C.L. Method of Symmetrical Co-Ordinates Applied to the Solution of Polyphase Networks. *AIEE Trans.* 1918. Vol. 37, p. 1027-1140.
- [5] Clarke, E. Determination of voltages and currents during unbalanced faults. *General Electric Review* 1937, Vol. 40, p. 511-513.
- [6] Park, R.H. Two-Reaction Theory of Synchronous Machines – Generalized Method of Analysis Part I. *AIEE Trans.* 1929. Vol. 48, p. 716-727.
- [7] Stanley, H.C. An Analysis of the Induction Motor. *AIEE Trans.*, 1938, Vol. 57, p. 751-755.
- [8] Kron, G. The Transformation of Reference Frames. Em *Equivalent Circuits of Electric Machinery*. John Wiley & Sons, Nova York, 1951.
- [9] Breerton, D.S. Lewis, D.G. Young, C.G. Representation of Induction Motor Loads During Power System Stability Studies. *AIEE Trans.* 1957. Vol. 76, p. 451-461.
- [10] Krause, P.C. Thomas, C.H. Simulation of Symmetrical Induction Machinery. *IEEE Trans. Power Apparatus Syst.* 1965. Vol. 84, p. 1038-1053.
- [11] Krause, P. Wasynczuk, O. Sudhoff, S. Pekarek, S. Reference-Frame Theory. Em *Analysis of Electric Machinery and Drive Systems*. 3ª ed.; Anderson, J. IEEE Press, Nova Jersey, 2013.
- [12] Pigazo, A. Moreno, V. Estebáñez, E. A Recursive Park Transformation to Improve the Performance of Synchronous Reference Frame Controllers in Shunt Active Power Filters. *IEEE Trans. Power Electronics* 2009. Vol. 24, p. 2065-2075.
- [13] Zhan, L. Liu, Y. Liu, Y. A Clarke Transformation-based DFT Phasor and Frequency Algorithm for Wide Frequency Range. *IEEE Trans. on Smart Grid* 2018. Vol. 9, p. 67-77.
- [14] Riyadi, S. Inverse Clarke Transformation based Control Method of a Three-Phase Inverter for PV-Grid Systems. Em 2014 1<sup>st</sup> International Conference on Information Technology, Computer and Electrical Engineering, Semarang, Indonésia, 8 nov. 2014.
- [15] Tavares, M.C. Pissolato, J. Portela, C.M. New Mode-Domain Representation of Transmission Line – Clarke Transformation Analysis. Em 1998 IEEE International Symposium on Circuits and Systems. Montrey, California, EUA, 31 mai. – 3 jun. 1998.
- [16] Prado, A.J. Pissolato Filho, J. Kurokawa, S. Bovolato, L.F. Corrected Transformation Matrices from Clarke's Matrix – Assymetrical Three-phase Lines Applications. Em 2006 IEEE Power Engineering Society General Meeting, Montreal, Quebec, Canadá, 18-22 jun. 2006.
- [17] Spanias, C. Lestas, I. A System Reference Frame Approach for Stability Analysis and Control of Power Grids. *IEEE Trans. on Power Systems* 2019. Vol. 34, p. 1105-1115.
- [18] O'rourke, C.J. Qasim, M.M, Overlin, M.R., Kirtley, J.L. A Geometric Interpretation of Reference Frames and Transformations: dq0, Clarke, and Park. *IEEE Trans. on Energy Conversion* 2019. Vol. 34, p. 2070-2083.