



---

GEOGEBRA PARA O ENSINO DE FUNÇÃO POLINOMIAL  
NA PERSPECTIVA DA AÇÃO MEDIADA

RODRIGO DANTAS DE LUCAS<sup>1</sup>

AGUINALDO ROBINSON DE SOUZA<sup>2</sup>

EMÍLIA DE MENDONÇA ROSA MARQUES<sup>3</sup>

ARIANNE VELLASCO GOMES<sup>4</sup>

**RESUMO**

Neste artigo apresentamos um trabalho desenvolvido com licenciandos calouros em Matemática, no qual, buscou-se a produção de significados através do desenvolvimento de uma sequência didática proposta utilizando o software GeoGebra, visando a análise do nível de domínio e de apropriação dos conceitos de funções polinomiais de uma variável real. A análise dos dados coletados está fundamentada na teoria da ação mediada de James Wertsch, a qual tem como foco o estudo sociocultural da mente e a memória coletiva sobre os aspectos históricos mediados pelas ferramentas culturais concernentes às instituições formais de ensino. O público-alvo consistiu em nove (9) estudantes, sendo cinco (5) do sexo masculino e quatro (4) do sexo feminino, do curso de Licenciatura em Matemática da Universidade Estadual Paulista - UNESP, em Bauru, São Paulo, Brasil. A pesquisa, de caráter qualitativo, pode ser caracterizada como um estudo de caso, visto que envolveu a busca por significados atribuídos aos sujeitos da pesquisa relativos às suas vivências e experiências pessoais. As atividades desenvolvidas com o software de geometria dinâmica e as reflexões solicitadas na sequência didática contribuíram para a experimentação, a criação de estratégias, a produção de conjecturas, a argumentação qualitativa e a dedução de propriedades matemáticas relativas aos conteúdos destas funções de uma variável real. Os licenciandos com maior base teórica em Matemática foram capazes de explorar os recursos computacionais com maior destreza, acuidade e precisão, conseguindo assim, maior aprofundamento nos conteúdos por eles explorados. Esses alunos apresentaram, ainda, um detalhamento com bom nível de rigor matemático em suas explicações sobre os conteúdos abordados, cometendo poucos erros de notação simbólica.

**Palavras-chave:** GeoGebra. Ensino de Matemática. Tecnologias digitais.

---

<sup>1</sup> Instituto Federal de São Paulo (IFSP) – [rodrigodantas@ifsp.edu.br](mailto:rodrigodantas@ifsp.edu.br)

<sup>2</sup> Universidade Estadual Paulista (UNESP) – [aguinaldo.robinson@unesp.br](mailto:aguinaldo.robinson@unesp.br)

<sup>3</sup> Universidade Estadual Paulista (UNESP) – [emilia.marques@unesp.br](mailto:emilia.marques@unesp.br)

<sup>4</sup> Universidade Federal de Uberlândia (UFU) – [arianne.vellasco@ufu.br](mailto:arianne.vellasco@ufu.br)



### ABSTRACT

In this article we present a work developed with freshmen undergraduates in Mathematics, in which the production of meanings was sought through the development of a proposed didactic sequence using the GeoGebra software, complete the analysis of the level of domain and appropriateness of a real variable. An analysis of the collected data is based on James Wertsch's theory of mediated action, which focuses on the sociocultural study of the mind and collective memory on the historical aspects of cultural tools concerning formal educational institutions. The target audience consisted of nine (9) students, five (5) male and four (4) female, from the Licentiate Degree in Mathematics at Universidade Estadual Paulista - UNESP, in Bauru, São Paulo, Brazil. The research, of a qualitative nature, can be characterized as a case study, as it involves a search for meanings answered by the research subjects regarding their personal experiences. The activities developed with the dynamic geometry software and the reflections requested in the didactic sequence contributed to the experimentation, the creation of an implemented, the production of conjectures, the qualitative argumentation and the deduction of mathematical properties related to the needs of the functions of a real variable. Graduates with a greater theoretical base in Mathematics were able to explore computational resources with greater dexterity, accuracy and precision, thus achieving greater depth in the contents they explored. These students also provide a good level of mathematical rigor in their explanations of the contents of their content, making few errors in symbolic notation.

**Keywords:** GeoGebra. Teaching of Mathematics. Digital technologies.

## 1. INTRODUÇÃO

Este artigo apresenta resultados obtidos, e analisados, pelos autores a partir da realização de uma pesquisa que surgiu do interesse dos autores sobre a mediação de recursos tecnológicos e da possibilidade de se utilizar o GeoGebra no ensino de funções, além dos questionamentos frequentes sobre como ocorre a aprendizagem em Matemática e de que forma estes recursos podem contribuir para uma aprendizagem que consideramos mais significativa no sentido dos estudantes entenderem melhor a sua atuação na sala de aula ao calcular, por exemplo, o domínio de uma função. Desta forma, o palco desta pesquisa foi a disciplina de Funções Elementares do curso de Licenciatura em Matemática e os atores foram estudantes que aceitaram o convite para participar. O roteiro para o desenvolvimento das atividades foi elaborado pelos pesquisadores. Utilizou-se uma sequência didática proposta especialmente para a coleta de dados, a qual deveria ser trabalhada pelos estudantes com o uso do GeoGebra, sendo seus resultados analisados através da perspectiva da Ação Mediada de James V. Wertsch (1991b, 1998), que visa compreender as relações entre a subjetividade



do agente, as ferramentas culturais, a apropriação e domínio, a criatividade e as convenções culturais (COSTA, 2016).

Nesse sentido, adotou-se a perspectiva da Ação Mediada para tratarmos sobre o significado dos conceitos. Para isso, optou-se por criar um ambiente que consideramos favorável para melhor dispor das ações realizadas pelos estudantes ao utilizar meios mediacionais, isto é, as ferramentas socioculturais. Tais ferramentas podem ser físicas (imagens, textos, animações, vídeos e simulação por objetos de aprendizagem) e não físicas (fala, enunciados, expressões e conceitos).

Sabedores que a disciplina é oferecida para futuros professores de Matemática, consideramos imperativo o uso de recursos computacionais no sentido de incentivar seu uso através da vivência dos discentes que estão sendo preparados para o mercado de trabalho e assim contribuir para que adotem esta prática em suas práticas metodológicas de ensino em futuro recente.

De acordo com Moran et al. (2000, p.66):

[...] a aprendizagem em informática, por ser algo novo, que não faz parte usualmente dos conhecimentos profissionais docentes adquiridos na formação inicial e que não é algo com o qual todos os professores se identifiquem aparentemente num primeiro contato, parece requerer um esforço maior de sua parte.

Nesta mesma linha de pensamento, destaca Kenski (2007, p.57):

[...] A análise de vários casos já relatados em pesquisas e publicações na área da educação mostra alguns problemas recorrentes, que estão na base de muitos fracassos no uso das tecnologias mais atuais na educação. O primeiro deles é a falta de conhecimento dos professores para o melhor uso das

tecnologias, seja ela nova ou velha. Na verdade, os professores não são formados para o uso pedagógico das tecnologias, sobretudo as TIC.[...] na maioria das vezes esses profissionais de ensino estão preocupados em usar as tecnologias que têm a sua disposição para “passar o conteúdo”, sem se preocupar com o aluno, aquele que precisa aprender.

Concordando com os autores acima, nos sentimos impulsionados a fazer uma diferença na formação inicial desses futuros professores utilizando o computador e o GeoGebra para que se sentissem mais motivados e confiantes num futuro próximo em suas práticas pedagógicas.

Na mesma linha de pensamento, cita Bittar (2001, p.77):

[...] é fundamental que os cursos de licenciatura preparem o professor para o uso das novas tecnologias. De fato, uma vez que a informática parece estar chegando realmente às salas de aulas, é preciso formar um profissional consciente e apto a fazer uso deste novo instrumento didático. Porém isto não tem sido sistematicamente objeto de estudo dos licenciados, o que implica novos professores sendo colocados no mercado de trabalho sem formação no uso das novas tecnologias educacionais. Para esses professores, assim como para tantos outros que estão trabalhando há muitos anos e que não tiveram acesso a esse tipo de formação, é necessário oferecer cursos de formação continuada para que eles se atualizem.

Acreditamos ainda, que os cursos de formação continuada são cruciais para termos professores mais bem preparados e engajados nessa difícil tarefa de ensinar, porém sentimos que esta formação deve iniciar-se na graduação.

O processo de ensino e aprendizagem apresenta uma relação que não é mecânica, não se trata de uma simples transmissão de conhecimentos e conceitos do professor que ensina para um aluno que aprende. As atividades de ensino visam estimular, dirigir, incentivar, impulsionar o processo de aprendizagem dos alunos.

Portanto, o ato de ensinar envolve uma estrutura cuja finalidade é alcançar a aprendizagem do aluno através do desenvolvimento do conteúdo. A relação entre ensino, aprendizagem e verificação da aprendizagem deve ficar longe da memorização, precisa ser pensada e desenvolvida envolvendo os estudantes de forma ativa, sem entretanto, serem deixados sozinhos procurando uma forma de aprender o conteúdo proposto, sendo o

professor, nesse caso, o facilitador intencional (LIBÂNEO, 1994). Ainda, afirma Libâneo (1994, p. 91), “O processo de ensino, ao contrário, deve estabelecer exigências e expectativas que os alunos possam cumprir e, com isso, mobilizem suas energias. Tem, pois, o papel de impulsionar a aprendizagem e, muitas vezes, a precede.”

Portanto o ensino é uma relação em que o professor põe em prática o tripé: objetivo, conteúdo e método, e dessa forma espera obter a aprendizagem do aluno como resultado, o que pode acontecer de modo mais ou menos significativo.

## **2. REFERENCIAL TEÓRICO**



A relação entre o ensino da Matemática e o uso da informática representa uma lacuna de pesquisa, visto que não é evidente e clara, como querem crer alguns. Ela necessita de uma reflexão para ser entendida.

## 2.1 TEORIA DA AÇÃO MEDIADA

James V. Wertsch é um psicólogo americano e professor da Washington University em Saint Louis, atuando no Departamento de Educação, onde atualmente é um dos teóricos mais expressivos da psicologia sociocultural. Wertsch é um adepto das ideias de Vigotski na corrente sociocultural, tendo como foco o estudo sociocultural da mente (WERTSCH, 1991b)

e a memória coletiva sobre os aspectos oficiais da história, mediadas pelas ferramentas culturais concernentes às instituições formais de ensino na antiga União Soviética e nos Estados Unidos (WERTSCH, 1998).

- Nosso objetivo neste trabalho é trazer as contribuições de Wertsch para estudarmos as formas de domínio e a apropriação dos conceitos de funções elementares mediados por computador no ambiente de ensino.

O termo sociocultural é utilizado por Wertsch na pretensão de entender como a ação mental está situada no contexto cultural, histórico e institucional. Wertsch alerta que se deve tomar cuidado em utilizar o termo sociocultural, pois as dimensões históricas podem receber pouca atenção, mas deixar de incorporar a palavra cultural pode trazer maiores prejuízos, tal como reduzir as diferenças culturais a diferenças históricas (WERTSCH, 1991b, p.16).

Consideremos um exemplo adaptado de Pereira e Ostermann (2012), onde se considera a internet como uma ferramenta cultural que surgiu recentemente. Suponha que um professor universitário de Matemática queira indicar um livro sobre o aprender Matemática com o GeoGebra, porém ele não se lembra do título e rapidamente acessa a internet do smartphone, indo até um site de busca e digitando as seguintes palavras-chave: livro e GeoGebra. Logo aparece uma lista de links que o direcionam para sites de vendas de livros. Ao acessar um desses sites, é exibido um catálogo com vários títulos, no qual é possível localizar aquele que ele estava procurando. Portanto, quem lembrou o título, o professor ou a internet acessada por meio do smartphone. A princípio, parece ter sido o professor, pois ele é o agente ativo dessa ação e, sem ele, a internet não funcionaria. Porém, ele não foi capaz de lembrar-se do título do livro sem a ajuda da internet, mas a internet não pode levar todo o



## REVISTA DO INSTITUTO GEOGEBRA INTERNACIONAL DO RIO GRANDE DO NORTE

mérito porque ela sozinha não realizaria a ação. Considerando a aproximação sociocultural, do ponto de vista da ação mediada, tanto o agente como a ferramenta cultural estavam envolvidos na ação, então é mais adequado falar que o professor agindo com a internet (acessada do smartphone) lembraram do título do livro. Outros exemplos podem ser utilizados para ilustrar a irredutibilidade da ação mediada, porém não nos estenderemos, alguns destes podem ser encontrados em Wertsch (1998, p.28) e Pereira e Ostermann (2012, p.27) sobre o ensino de Matemática básica.

É importante salientar que a ferramenta por si só não possui e nem executa nenhuma ação, é necessária uma pessoa habilidosa que, ao usar tais meios mediacionais, consiga produzir significados com sua aprendizagem (WERTSCH, 1998). Além disso, Martins e Moser (2012 p.12) alertam que o "significado está na utilização da palavra realizada pelas pessoas. Os meios são opacos por si sós: dependem do contexto, da cultura e da utilização que se faz deles". Esses meios mediacionais ou ferramentas culturais alteram a ação humana e as estruturas psicológicas, trazendo grandes implicações na maneira como são utilizadas. A posição que Wertsch defende sobre o significado e o propósito das ferramentas culturais está vinculada às ideias de Zinchenko (1985), o qual refazem uma leitura de Vigotski sobre o significado atribuído aos signos como ferramentas psicológicas. Assim como Wertsch, Zinchenko também se apoia em Bakhtin e "observa que nem toda ferramenta é dotada de significado, mas pode sim, ser dotada de propósito. Assim, as ações podem ser mediadas por ferramentas desprovidas de significado, mas plenas de propósitos" (GIORDAN, 2008, p.77). Por isso, podemos dizer que as ferramentas são dotadas de significados quando as utilizamos para uma determinada finalidade em que esses significados sejam internalizados pelo sujeito, e caso não ocorra a internalização dessa atividade, a ferramenta poderá ser manipulada "mecanicamente" e estará provida apenas de propósito, isto é, será utilizada, por exemplo, apenas para executar uma tarefa que foi estabelecida, mas o sujeito não entende os conceitos ali estabelecidos.

Nesse sentido é que Wertsch adota a ação mediada como unidade de análise para estudar os processos mentais, deixando claro que a ação interna não deve ser separada da ação externa, onde "o processo de internalização é aquele pelo qual ocorre a formação de uma estrutura interna e não a transferência da atividade externa ou de signos e ferramentas para um plano interno preexistente."(GIORDAN, 2008, p.78).

Em resumo, Wertsch apresenta a ação mediada no estudo da consciência humana, expondo as limitações da abordagem semiótica por meio de Zinchenko. Já em Vigotski, Wertsch reforça o uso do signo em detrimento de outras ferramentas, destacando as questões socioinstitucionais para demarcar as propriedades semióticas.

Em se tratando do uso de instrumentos, o domínio ocorre em saber como utilizá-los para o propósito ao qual foi destinado. Por exemplo, suponha o uso de um simulador computacional para explicar os estados físicos da água; então, aprender a manusear corretamente a ferramenta para explanar sobre as mudanças de estado caracteriza-se como domínio, pois essa ferramenta foi perfeitamente utilizada para o propósito para o qual foi designada. Caso a ferramenta seja utilizada em outro contexto, como, por exemplo, explicar fenômenos geográficos que envolvam as mudanças de estado da matéria, esse processo é característico da apropriação. Aqui, foi tomado para si o que pertencia ao outro, ou seja, a ferramenta foi utilizada a partir do propósito para o qual ela havia sido designada para outro de interesse exclusivo do agente. É importante salientar que o domínio e a apropriação se referem às ferramentas culturais e, como descrito anteriormente, elas podem ser físicas (computador, livros, objetos de aprendizagem) e não físicas (palavra, signos, enunciados e inclusive os conceitos). Desse modo, fica entendido que pode ocorrer o domínio, mas nem sempre ocorre a apropriação.

Neste trabalho, nossa questão de pesquisa é o significado do conceito e o nível de domínio e de apropriação ao utilizarem o computador e o software GeoGebra. Para tanto, será impossível analisar essas questões e deixar passar despercebido o processo de domínio e apropriação, tendo em vista que tanto os conceitos como os objetos (computador e GeoGebra) fazem parte do "kit de ferramentas" (ou caixa de ferramentas) culturais e podem transformar a ação dos sujeitos.

Existe um consenso, entre os professores e pesquisadores na área de educação, de que a introdução pura e simples do computador na escola, não tem o poder de mudar a qualidade da educação; em concordância com Cotta Júnior (2002, p.44).

[...] a introdução do computador deve vir acompanhada de mudanças adequadas na orientação pedagógica da educação, sem o que o computador torna-se apenas mais uma sofisticação tecnológica, que faz parecer que a escola tornou-se mais moderna, mas que não traz nenhum benefício prático para a educação.



## REVISTA DO INSTITUTO GEOGEBRA INTERNACIONAL DO RIO GRANDE DO NORTE

---

Entretanto, pode-se afirmar que o uso adequado do computador é uma poderosa ferramenta na melhoria da qualidade dos processos de ensino e de aprendizagem. Assim, é necessário planejar com muita intencionalidade o seu uso dentro de uma metodologia que potencialize as suas utilidades. Pensando desta maneira, idealizamos as atividades que compuseram a sequência didática proposta aos estudantes neste trabalho. Portanto, ressaltamos que em nossa abordagem não se busca uma melhor transmissão de conteúdo, nem a informatização do processo ensino-aprendizagem, mas sim uma transformação educacional. Tal transformação deve significar uma mudança de paradigma e favorecer a formação de cidadãos mais críticos com autonomia para construir o próprio conhecimento. Mais ainda, que possam participar da construção de uma sociedade mais igualitária e com melhor qualidade de vida. Acreditamos que o uso de computadores na educação potencializa tais mudanças.

Para além do cuidado com a forma de abordagem das novas tecnologias, nos preocupa, por vezes, a resistência e a deficiência na formação dos futuros professores de Matemática quanto ao uso das NTICs, visto que muitas vezes passam todo o curso de graduação sem o devido contato e sem refletir em suas concepções.

Favoravelmente ao processo de transformação da educação, temos que os estudantes, por crescerem em uma sociedade permeada de recursos tecnológicos, são hábeis manipuladores da tecnologia, mesmo aqueles pertencentes às classes menos favorecidas econômica e socialmente. Naturalmente, a percepção deles sobre tais recursos é diferente da percepção dos seus professores, que cresceram em uma época de pouco convívio com a tecnologia, assim os estudantes se familiarizaram mais rapidamente com tais recursos.

O professor que foi preparado para usar o computador como uma máquina de transmissão de informações através de softwares, muitas vezes se questiona sobre o papel que tem desenvolvido no processo atual de ensino e aprendizagem, bem como, qual será o futuro de sua profissão, uma vez que afloram na sociedade outros espaços de conhecimento e de aprendizagem fora do ambiente escolar.

Mesmo o professor preparado para utilizar o computador para a construção do conhecimento é obrigado a se questionar constantemente, pois, geralmente se vê diante de um equipamento cujos recursos não consegue dominar em sua totalidade. Além disso, precisa compreender e investigar os temas ou questões que surgem no contexto e que se transformam em desafios para sua prática – uma vez que nem sempre são de seu pleno domínio, tanto no que diz respeito ao conteúdo quanto à sua estrutura.



Tais reflexões podem estar resultando numa grande resistência de muitos professores em utilizarem e incorporarem em sua prática pedagógica as novas tecnologias e, em especial, os computadores e notebooks. As atuais exigências que o enfrentamento da pandemia da

Covid-19 impôs à categoria, certamente trarão bons resultados na relação dos professores com as tecnologias, no processo de ensino e aprendizagem da Matemática.

Acreditamos que, a partir desse momento, as reflexões e alterações significativas na formação inicial dos professores serão muito ampliadas, resultando numa formação que articula a prática, a reflexão, a investigação e os conhecimentos teóricos requeridos para promover uma transformação na ação pedagógica.

### **3. METODOLOGIA**

O trabalho foi realizado no Laboratório Didático do Departamento de Matemática da UNESP/Bauru com computadores e notebooks, e auxílio do software GeoGebra com o objetivo de entendermos as dificuldades na realização das atividades propostas sobre funções polinomiais. A tentativa de compreensão mais detalhada dos significados e situações são características da pesquisa qualitativa. Essa abordagem de pesquisa privilegia a compreensão dos comportamentos, dos valores, das crenças, das representações, das opiniões e das atitudes. O pesquisador investiga o sujeito com o intuito de compreender suas experiências ou como eles as interpretam e o modo como se estrutura o ambiente que convivem (BOGDAN; BIKLEN, 1994).

A estratégia de pesquisa utilizada foi o estudo de caso qualitativo, pois segundo Platt (1992) citado por Godoy (2010), esse tipo de estudo tem a característica fundamental de envolver a busca por significados que são atribuídos pelos sujeitos às suas vivências e experiências pessoais.

Para a etapa da coleta de dados registrou-se o áudio das falas e o vídeo da tela de computador (com o apoio do software OBS - Open Broadcaster Software) (<https://obsproject.com/pt-br>) onde ocorreram as manipulações do GeoGebra. Essa forma de conduzir a coleta de dados teve como objetivo coletar as descrições, conversas e diálogos, bem como seus apontamentos na forma escrita e familiarização com o GeoGebra, com o intuito de preservar os dados a serem analisados (BOGDAN; BIKLEN, 1994).



Para que essa coleta de dados oferecesse os subsídios necessários a participação dos alunos foi planejada de acordo com o termo de consentimento livre e esclarecido, assinado antes do desenvolvimento das atividades.

Os alunos foram organizados em duplas, com exceção de um trio, de forma que pudessem interagir ao realizar as atividades. Para registrar esta interação, os áudios de cada grupo foram gravados e as telas durante todas as atividades também, assim poderíamos ouvir e ver o que estavam fazendo ao mesmo tempo. Além disso, os alunos registravam as respostas de suas conclusões em uma folha de respostas entregue a eles. Assim, tínhamos o registro das conversas, as imagens do que estavam fazendo no GeoGebra e como formalizaram suas conclusões por escrito. Participaram 9 alunos do primeiro ano da Licenciatura em Matemática, sendo 5 do sexo masculino e 4 do sexo feminino com idade média de 21 anos. Somente um aluno era graduado (FATEC), e todos os alunos possuem computador/notebook com acesso à internet em suas casas. Um único aluno respondeu conhecer o GeoGebra, através de demonstrações realizadas pelo seu professor do Ensino Médio.

Para finalizar a análise, realizamos uma entrevista, após um ano do encontro, que foi gravada em áudio sobre a percepção do ponto de vista deles (alunos) das atividades realizadas e se haviam dado continuidade na utilização do GeoGebra e os recursos computacionais em outras disciplinas ou não. Nessa entrevista/conversa nossa ideia foi dar um retorno aos alunos do que haviam realizado, de algumas percepções que tivemos e procurar analisar o efeito da mediação causado nos mesmos.

#### **4. RESULTADOS E DISCUSSÕES**

Tivemos a participação de 9 alunos que foram divididos em três duplas e um trio de acordo com a afinidade existente entre eles. Inicialmente, apresentamos o termo de consentimento a eles e após todos concordarem iniciamos mostrando como eles deveriam proceder para que suas atividades fossem gravadas no OBS.

Exposto isso, disponibilizamos uma folha de atividades com alguns comandos básicos do GeoGebra que utilizamos na atividade proposta do dia. Os alunos foram reconhecendo os comandos sem preocupação com tempo e demoraram entre 40 min a 50 min nesta atividade. Em seguida, entregamos a folha com a atividade (Figura 1) proposta e a folha que chamamos de caderno de registros.

**Figura 1: Imagem da folha de atividades**

**ATIVIDADE COM FUNÇÃO QUADRÁTICA – 19/05/2017**

Atividade 1

1. No campo “Entrada” digite a função  $f(x) = ax^2 - 1$
2. Como “a” não foi definido, será criado um controle deslizante para valores possíveis de “a”
3. Movimente o controle deslizante de “a” para variar os valores do mesmo e observe os gráficos de acordo com os valores do parâmetro “a”
4. Que conclusões você tira sobre os gráficos? Anote as observações do grupo no caderno de registros.
5. **Salve o gráfico com o nome: 2017\_Projeto Funções Elementares Atividade 01\_Grupo “número do seu grupo”**
6. Qual o domínio e a imagem desta função? Você consegue generalizar o domínio e a imagem de acordo com os valores do parâmetro “a”? Anote no caderno de registros de seu grupo.
7. Coloque o controle deslizante em 1. Existem raízes reais para a função  $f(x)$ ? (OBS.: Utilize o comando Raiz[função, valor inicial, valor final] = Raiz[f,-10,10] para determinar as raízes da função f)
8. **Salve o gráfico com o nome: 2017\_Projeto Funções Elementares Atividade 02\_Grupo “número do seu grupo”**
9. Voltando à função  $f(x) = ax^2 - 1$ , existe uma expressão para se determinar as raízes? Qual? Desenvolva isso em seu caderno de registros.
10. Movimente o controle deslizante. Observe o que acontece e anote suas observações no caderno de registros.
11. Digite, agora, no campo “Entrada” a função  $g(x) = \sqrt{x}$  ( $g(x)=\text{sqrt}(x)$ )
12. Faça a função composta  $h(x) = g \circ f(x) = \sqrt{ax^2 - 1}$
13. Movimente o controle deslizante de “a” para variar os valores do mesmo e observe os gráficos de acordo com os valores do parâmetro “a”.
14. Que conclusões você tira sobre os gráficos? Anote suas observações no caderno de registros.
15. Qual o domínio e a imagem destas funções? Você consegue generalizar o domínio e a imagem de acordo com os valores do parâmetro “a”?
16. Quais as semelhanças e diferenças entre os domínios e a imagens das três funções,  $f$ ,  $g$  e  $h$ ? Anote em seu caderno de registros.
17. Coloque o controle deslizante em 1. Existem raízes reais para essas duas funções? (Utilize o comando Raiz[função, valor inicial, valor final] para determinar as raízes das funções  $g$  e  $h$ , caso existam.)
18. Movimente o controle deslizante. Observe o que acontece e anote suas observações no caderno de registros.
19. Caso vocês tenham obtido raízes para as duas funções, compare-as e explique o que está acontecendo e por quê.
20. **Salve o gráfico com o nome: 2017\_Projeto Funções elementares Atividade 03\_Grupo “número do seu grupo”**
21. Digite, agora, no campo “Entrada” a função  $q(x) = \sqrt[3]{ax^2 - 1}$ ; (Lembre-se que a raiz cúbica pode ser dada pela potência 1/3)
22. Movimente o controle deslizante de “a” para variar os valores do mesmo e observe os gráficos de acordo com os valores do parâmetro “a”.
23. Que conclusões você tira sobre os gráficos? Anote suas observações no caderno de registros.
24. Existem raízes reais? Existe uma expressão para se determinar as raízes? Qual?
25. Compare as raízes das funções  $f$ ,  $h$  e  $q$ .
26. Qual o domínio e a imagem desta função? Você consegue generalizar o domínio e a imagem de acordo com os valores do parâmetro “a”?
27. Qual as semelhanças e diferenças entre os domínios e imagens dessas funções?
28. **Salve o gráfico com o nome: 2017\_Projeto Funções Elementares Atividade 04\_Grupo “número do seu grupo”**

Fonte: Elaborado pelos autores (2021)

Ao analisar os vídeos com os áudios deste encontro, encontramos uma diferença entre os grupos no sentido de independência e conhecimento prévio dos assuntos abordados, uma vez que as funções estudadas já deveriam ser do conhecimento deles, pois são vistas no ensino médio.

Na tarefa de reconhecimento do software tivemos as seguintes observações:

Grupo 1

- buscaram entender os comandos testando e retestando várias vezes;

- têm uma excelente interação, conversando bastante para entrarem em um consenso e esclarecerem suas dúvidas;



- possuem bom domínio dos conceitos matemáticos básicos estudados na atividade.

#### Grupo 2

- menos independentes que o grupo 1 em relação ao software (solicitaram 3 vezes a ajuda do professor para entenderem determinado comando);

- existe uma diferença de idade maior entre os participantes desta dupla e por isso, a aluna mais nova “confia” na aluna mais velha, em relação às dúvidas;

#### Grupo 3

- no reconhecimento do software, analisavam o comando antes de digitar tentando entender o que o comando faria;

- exploraram bastante o recurso do zoom para observarem onde ocorriam as intersecções de gráficos com os eixos coordenados;

- único grupo que percebeu a mistura de cor dos gráficos na composição de funções.

#### Grupo 4

- único grupo com três participantes, mas um dos membros participou menos que os demais;

- utilizaram uma versão do GeoGebra diferente (os ícones tinham uma apresentação diferente, mas com as mesmas funções) dos demais e utilizaram um notebook ao invés de um desktop;

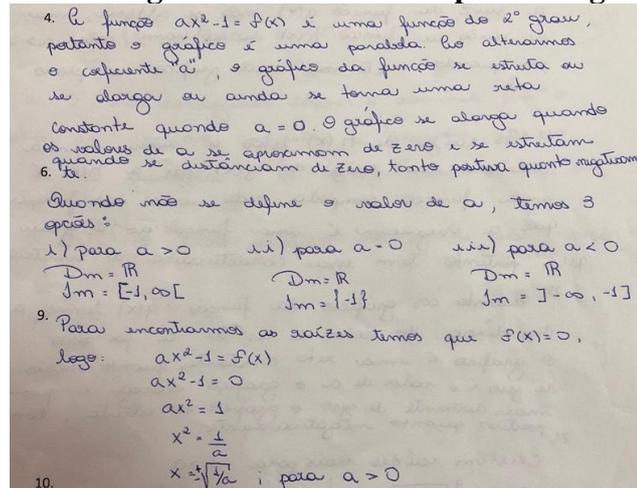
- exploraram bem os comandos de reconhecimento do software.

Uma observação interessante em relação a todos os grupos ocorreu numa atividade de reconhecimento do software GeoGebra, onde deveriam digitar uma função  $f(x) = ax^2 + bx + c$ , delimitando o domínio da mesma de  $x_1$  a  $x_2$  através de controles deslizantes para

os parâmetros  $a$ ,  $b$ ,  $c$ ,  $x_1$  e  $x_2$ . Ocorreu que ao criar os controles deslizantes de  $x_1$  e  $x_2$ , eles assumiram o valor numérico igual a um. Quando foi digitada a expressão da função, não aparecia nenhum gráfico na tela do GeoGebra, já que não existia intervalo de domínio para isso. Todos os grupos demoraram a entender que  $x_2$  deveria ser maior que  $x_1$  para a existência do gráfico; para isso deveriam mover os controles deslizantes de  $x_1$  ou  $x_2$ . Apagavam o comando e redigitavam de novo, acreditando que haviam feito algo de errado. O interessante deste fato, aparentemente simples, é que isso não ocorre no caderno ou na lousa, pois estamos habituados a desenhar o gráfico (se soubermos como é) sem pensar no domínio da função. Esta instabilidade criada nesta situação mostrou a importância de se analisar o que está sendo feito e pensar a respeito do porquê não estava sendo mostrado o gráfico, o que não ocorreria sem o software.

Nos itens 1 a 10 da atividade proposta, pedimos aos alunos que digitassem a função  $f(x) = ax^2 - 1$ , e explorassem as variações quanto a forma dos gráficos, domínio, imagem, raízes e generalizações possíveis, a partir do parâmetro  $a$  da função. O grupo 1 utilizou o software para explorar as variações de forma do gráfico e perceber as raízes. Discutiram as questões de forma bastante objetiva e formalizaram muito bem as respostas de todas as questões propostas como podemos observar na Figura 2.

**Figura 2: Imagem do caderno de respostas do grupo 1**

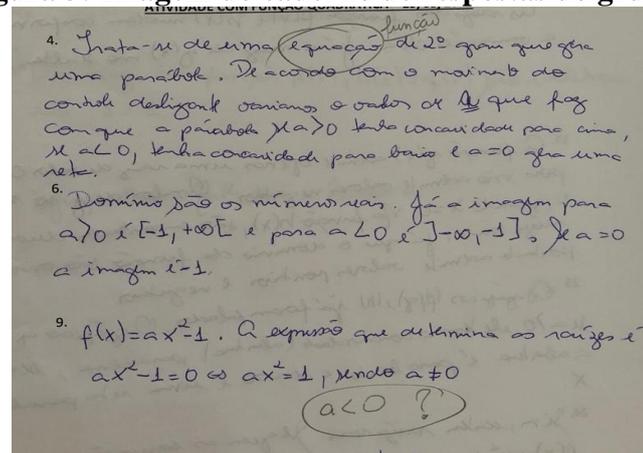


Fonte: Elaborado pelos autores (2021)

O grupo 2 também trabalhou bem as questões, mas cometeram alguns enganos na formalização das respostas e também nas falas. Confundiram equação com função e na expressão da generalização das raízes da função escreveram uma equação que não poderia ser resolvida com o parâmetro  $a$  negativo, ( $ax^2 = 1$ ) onde tomaram o cuidado de definir que  $a \neq 0$ , mas se  $a$  for negativo a equação não terá raízes reais. Isso mostra que a exploração do software não consegue esclarecer algumas dificuldades de conhecimento de base Matemática, mas com atividades deste tipo, podemos identificar estes erros de maneira mais fácil que somente na aula tradicional onde o professor apenas expõe o conteúdo. Assim, acreditamos ser este o melhor caminho no sentido de um melhor processo de ensino e aprendizagem. Este grupo apresentou uma certa dificuldade em definir o domínio e a imagem da função e utilizaram o gráfico no GeoGebra para compreender, além de pedirem “ajuda” ao grupo 1 sobre a diferença entre domínio e imagem de uma função. Mesmo com a ajuda, não conseguiam entender se o intervalo da imagem era aberto ou fechado no valor -1. Recorreram ao gráfico gerado pelo software aplicando “zoom” para ver se era próximo de -1 ou atingia o

valor -1. Mesmo observando no gráfico, uma aluna dizia que poderia ser muito próximo e não tocar (ideia de limite, sendo que não tiveram a disciplina de Cálculo ainda). Outro fato interessante na “conversa” desta dupla foi em determinado momento uma das alunas “culpar” não saberem o domínio e a imagem da função porque não haviam visto este assunto na aula de Funções Elementares (Figura 3).

**Figura 3: Imagem do caderno de respostas do grupo 2**



Fonte: Elaborado pelos autores (2021)

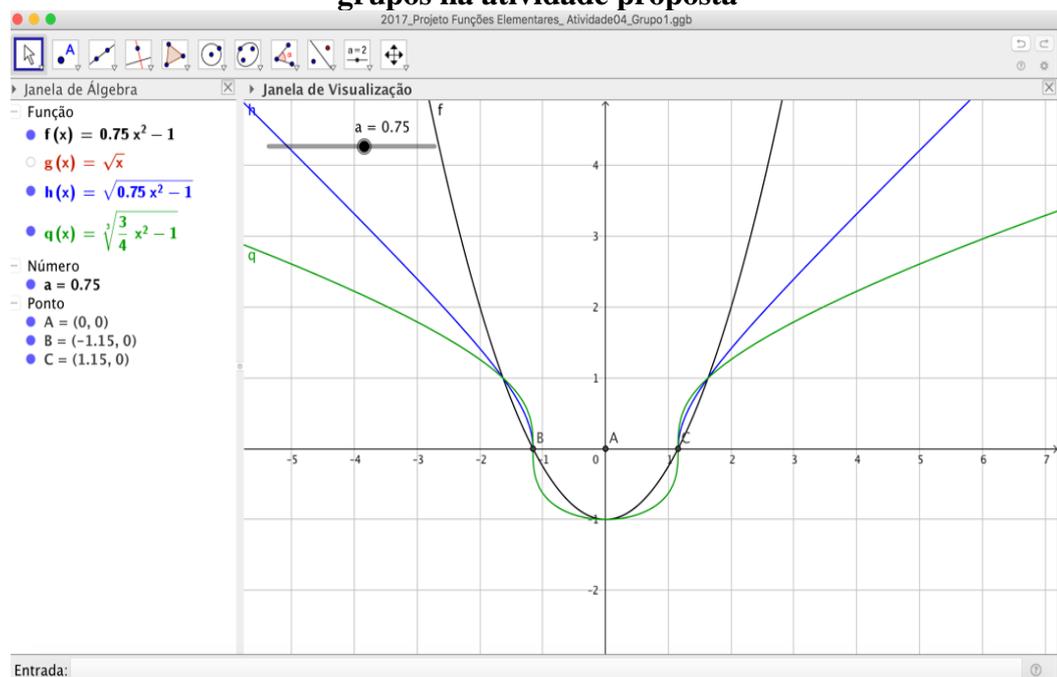
O grupo 3 teve dificuldade em definir o domínio e a imagem da função. Através do áudio e da formalização escrita, confundem o domínio com a imagem da função. Assim concluíram que como não havia restrições para  $x$ , a imagem seria todo o conjunto dos números reais. Neste caso, o gráfico gerado no software não ajudou a dupla a entender, pois havia uma dúvida na definição de domínio e imagem no grupo. Assim a construção de significados dos conceitos não ocorreu da forma como pretendíamos nesta parte do trabalho. Para encontrar as raízes da função, utilizaram o GeoGebra para confirmar o que estavam pensando e formalizando no caderno de respostas e interagiram muito bem entre si.

É importante observarmos, que a interação, os meios mediacionais inseridos, os conhecimentos prévios e os conceitos outrora estudados, passaram a influenciar de maneira significativa a produção de novos significados e algumas ideias começaram a ser reformuladas. Portanto, não podemos falar em produção de significados dos conceitos apenas, considerando as ideias dos alunos no momento presente e num contexto isolado, sendo mais adequado nos referirmos aos estudantes agindo com ferramentas socioculturais (WERSTCH, 1991a, 1991b, 1998). Giordan (2008, p.292) ainda alerta que:

O que se inicia em um contexto situacional de uma atividade conjunta, mais tarde se torna contexto mental compartilhado de uma experiência, permitindo que o professor e alunos continuem o processo de elaboração de ideias apenas por meio da fala, da escrita ou de outras linguagens. Neste movimento da sala de aula, a atividade e o discurso do passado tomam-se contexto mental compartilhado no presente.

Para finalizar a atividade deste dia, propusemos o estudo da função  $q(x) = \sqrt[3]{ax^2 - 1}$  e da mesma forma analisaram os gráficos, domínio e imagem além de compararem esta função com as funções trabalhadas anteriormente (Figura 4). Nossa ideia ao pensar nesta finalização era que os alunos compreendessem as restrições em relação ao domínio, entendessem um pouco das formas possíveis de gráficos a serem formados e relacionassem à imagem das funções. Como a raiz cúbica de um número real sempre existe, acreditamos que eles poderiam relacionar esse fato a função de  $q(x)$  e entendessem assim o porquê das restrições do domínio que nem sempre são todos os números reais. Esperávamos que relacionassem as raízes das funções anteriores, os domínios e imagens e conseguissem generalizar domínio e imagem de todas as funções em função do parâmetro  $a$ .

**Figura 4: Imagem dos gráficos de  $f(x)$ ,  $g(x)$  e  $q(x)$  gerados no GeoGebra por um dos grupos na atividade proposta**



Fonte: Elaborado pelos autores (2021)

O grupo 1 atendeu as expectativas que tínhamos no início ao propor a atividade. Existia uma ótima interação entre eles e utilizavam muito bem o GeoGebra para tirar suas

conclusões e resolver possíveis dúvidas que surgiam. Acreditamos que isso aconteceu devido ao fato de os alunos possuírem bom domínio dos conceitos abordados e assim a atividade criou instabilidades que foram esclarecidas analisando as funções e suas respectivas variações na forma. Isto dificilmente teria acontecido sem a mediação do computador e com o software, pois seria muito complicado eles entenderem as formas dos gráficos, por exemplo, sem um conhecimento maior das ferramentas de Cálculo como limites e suas derivadas para estudarem pontos de máximo, mínimo e inflexão.

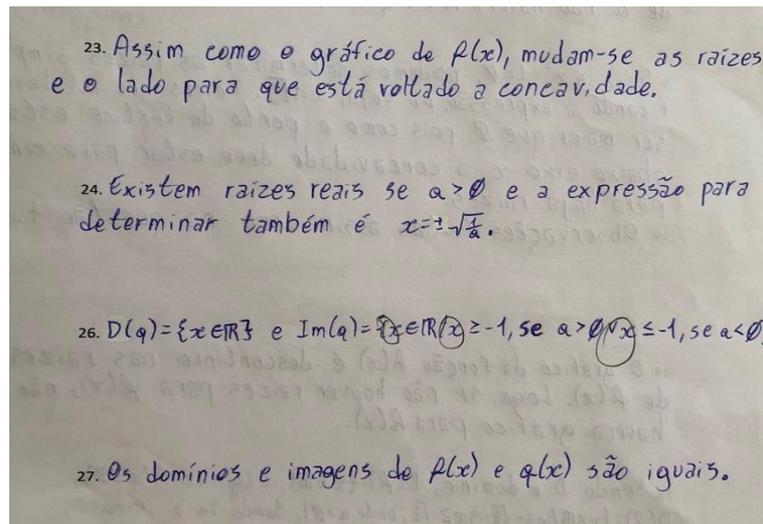
Generalizaram muito bem as raízes, domínio e imagens da função  $q(x)$  em função do parâmetro  $a$  e relacionaram as funções anteriores com bastante convicção e segurança.

No grupo 2 pudemos notar um certo cansaço ao final da atividade em que as alunas discutiam as questões e utilizavam bem o software para suas conclusões, mas não passavam tudo para o caderno de respostas. Além do aparente cansaço continuou um pouco da falta de atenção (ou concentração talvez), pois no item 26 respondem corretamente o domínio e a imagem de  $q(x)$ , mas no item seguinte voltam a afirmar que a imagem de  $f(x)$  e  $q(x)$  são todos os números reais, contradizendo o que estava registrado tanto no item anterior como na tela do GeoGebra da atividade salva por elas.

O que percebemos com este grupo é que alguns alunos começam a ficar muito impacientes mesmo com uma atividade que exigia atenção e não fosse tão monótona, mas que não era resolvido em poucos minutos. Talvez os integrantes deste grupo fossem alunos mais acostumados com a aula tradicional e a forma mecânica de sempre resolver alguns exemplos semelhantes ao exposto na aula sem ter muita interpretação e participação na resolução e discussão do que foi ensinado.

O grupo 3 ao verem o gráfico gerado no GeoGebra, concluíram que a função tinha o mesmo comportamento da função  $f(x)$  e por isso responderam com certa rapidez as questões da atividade não se atentando muito em compará-la com todas as outras funções estudadas traçando assim semelhanças e diferenças e o porquê de cada uma destas propriedades. Novamente têm a ideia correta da imagem da função (assim como aconteceu anteriormente), mas registraram erroneamente como podemos observar na Figura 5.

**Figura 5: Imagem do caderno de respostas do grupo 3**



Fonte: Elaborado pelos autores (2021)

O grupo 4 discutiu bastante as questões de semelhanças e diferenças das funções e conseguiu expressar bem suas ideias na formalização registrada no caderno. Foi o único grupo que registrou que para encontrar as raízes de  $h(x)$  e  $q(x)$  bastaria encontrar as raízes de  $f(x)$  desde que o parâmetro  $a$  fosse positivo.

## 5. CONSIDERAÇÕES FINAIS

O presente trabalho se propôs a investigar como ocorre a produção de significados dos estudantes de licenciatura em Matemática utilizando uma sequência de atividades propostas com o software GeoGebra, visando verificar o nível de domínio e apropriação dos conceitos de funções de uma variável com a ação mediada por computador.

Assim, partindo do pressuposto, motivação inicial desta pesquisa, que o estudo de funções é de suma importância para o bom entendimento de disciplinas futuras, como Cálculo Diferencial e Integral por exemplo, entendemos que pesquisas que se dedicam a analisar como ocorre a produção de significados dos alunos sobre os conceitos relacionados à referida teoria pode proporcionar novos olhares em direção a perspectivas diferentes das tradicionalmente utilizadas nos cursos introdutórios de Matemática. Dessa maneira, interpretamos que tratar dessas questões de modo mais próximo da realidade deles nos dias de hoje, na qual o aluno aprende a utilizar recursos tecnológicos que os levem a pensar mais do que reproduzir e investigar ao invés de decorar, seja um caminho que as escolas tendem a seguir cada vez mais.



## REVISTA DO INSTITUTO GEOGEBRA INTERNACIONAL DO RIO GRANDE DO NORTE

---

As atividades com o GeoGebra contribuíram para a experimentação, a criação de estratégias, a produção de conjecturas, a argumentação qualitativa e a dedução de propriedades matemáticas relativas a conteúdos matemáticos do Ensino Médio e, mais especificamente, as funções elementares. Assim, a abordagem Matemática no GeoGebra ofereceu aos futuros professores atividades que permitissem que este tipo de exploração fosse realizado.

O que pudemos concluir com o trabalho realizado foi que os alunos com mais base teórica exploram mais os recursos tecnológicos conseguindo um aprofundamento maior dos conteúdos estudados. Apresentam, ainda, um detalhamento maior em suas explicações e cometem menos erros de notação ao escreverem matematicamente.

Apesar de estarmos trabalhando com funções, assunto já estudado pelos mesmos no Ensino Médio e na disciplina do curso de Licenciatura, notamos muitos erros conceituais e muitas dúvidas ainda presentes nos alunos. Notou-se também muitos erros, por falta de atenção na forma de escrever e salientamos na discussão dos resultados que devemos tentar minimizar estas falhas que podem se propagar já que estamos tratando com os futuros professores de Matemática.

A divisão dos alunos em grupos também foi um fator positivo para o desenvolvimento das atividades, uma vez que possibilitou a exploração, investigação e discussão dos assuntos que estavam sendo estudados resultando, de forma geral, em uma maior apropriação e domínio dos conceitos. Isto pôde ser observado nos áudios dos alunos muitas vezes quando citam que estavam entendendo naquele momento o que não haviam entendido na sala de aula, além de dizerem que seria muito mais fácil se nas aulas tivessem estes recursos. Por outro lado, grupos com 3 alunos possibilitam que algum dos alunos, se um deles não demonstrar interesse, participe menos ou simplesmente nem participe deixando as discussões para os outros dois membros do grupo, mas este é um fator que não podemos ter controle.

Sabemos da dificuldade, no dia a dia da sala de aula com uma quantidade maior de alunos e de diferentes níveis de conhecimento, de se trabalhar desta forma e ainda mais com uma ementa a ser seguida. Poderíamos pensar em trabalhar de forma paralela com o uso de um ambiente virtual de aprendizagem com o objetivo de motivar e facilitar o entendimento das disciplinas do curso, principalmente as disciplinas de nivelamento onde não se tem muito tempo e por outro lado existe muito conteúdo para ser abordado considerando que os discentes já tenham visto o mesmo no Ensino Médio.



### REFERÊNCIAS

- BITTAR, M. O uso de softwares educacionais no contexto da aprendizagem virtual. In: CAPISANI, Dulcimira. Educação e arte no mundo digital. Universidade Federal do Mato Grosso Sul, Campo Grande, 2001. p.77.
- COSTA, H.R. Investigando a produção de significados sobre os números quânticos, as formas dos orbitais e as transições eletrônicas do modelo quântico por meio das ferramentas socioculturais. Tese de doutorado - Universidade Estadual Paulista, Faculdade de Ciências, Bauru 2016.
- COTTA JÚNIOR, A. Novas Tecnologias Educacionais no ensino de Matemática: estudo de caso – Logo e do Cabri-Géomètre. 2002. 256 f. Dissertação (Mestrado em Engenharia de Produção) – Programa de Pós-graduação em Engenharia de Produção, Universidade Federal de Santa Catarina, 2002.
- GIORDAN, M. Computadores e linguagens nas aulas de ciências. Ijuí: Unijuí, 2008.
- KENSKI, V.M. Educação e tecnologias: O novo ritmo da informação. 3ed. Campinas: Papirus, 2007.
- LIBÂNEO, J. C. O processo de ensino na escola. São Paulo: Cortez, 1994. P. 77- 118
- LIBÂNEO, J. C. Os métodos de ensino. São Paulo: Cortez, 1994. P. 149-176
- MARTINS, O. B. ; MOSER, A. . Conceito de mediação em Vygotsky, Leontiev e Wertsch. Intersaberes (Facinter), v. 7, p. 8-28, 2012.
- MORAN, J.M. et al. Novas Tecnologias e mediação pedagógica. Campinas, Papirus, 2000.
- PEREIRA, A. P DE; OSTERMANN, F. A aproximação sociocultural a mente, de James V. Wertsch, e implicações para a educação em ciências. Ciência e Educação, v. 18, n. 1, p. 23-29, 2012.
- WERTSCH, J. V. Commentary on J. A. Lawrence and J. Valsiner “Conceptual roots of internalization: from transmission to transformation”. Human Development, Berkley, v. 36, n. 3, p. 168-171, 1993.
- \_\_\_\_\_. Mind as action. New York: Oxford University Press, 1998.
- \_\_\_\_\_. Voices of the mind: a sociocultural approach to mediated action. Cambridge: Harvard University Press, 1991b.
- WERTSCH, J. V. Commentary on I. Arieviditch and R. van der Veer “Furthering the internalization debate: Gal’perin’s contribution”. Human Development, Berkley, v. 38, n. 2, p. 127-130, 1995.



**REVISTA DO INSTITUTO GEOGEBRA  
INTERNACIONAL DO RIO GRANDE DO NORTE**

---

WERTSCH, J. V. A sociocultural approach to socially shared cognition. In: RESNICK, L. B.; LEVINE, J. M.; TEASLEY, S. D. (Org.). Perspectives on socially shared cognition. Washington: American Psychological Association, p. 85-100, 1991a.

\_\_\_\_\_. Vygotsky y la formación social de la mente. Buenos Aires: Paidós, 1985.  
WERTSCH, J. V; DEL RIO, P.; ALVAREZ, A. Estudos socioculturais da mente. Porto Alegre: Artmed, 1998.

ZINCHENKO, V. P. Vygotsky' s ideas about units for the analysis of mind. In WERTSCH, J. V (Eds.). Culture, Communication and Cognition. New York, USA: Cambridge Uni. Press, 1985, p.94-118.